ملحق بحوث مجلة القادسية للعلوم الصرفة المجلد 15العدد 4 سنة 2010
(ISSN 1997-2490)

الانتظام لحلقات أشباه الزمر

صادق عبد العزيز مهدي
Sadiqmehdi71@yahoo.com

الخلاصة :
إذا كانت A حلقة واحدية وكانت S شبه زمرة فإننا نجد في الأبحاث والدراسات الجبرية الحديثة اهتماماً كبيراً بإيجاد الشروط اللازمة والكافية الواجب وضعها على الحلقة A وعلى شبه الزمرة S حتى تمتلك حلقة شبه الزمرة $A[S]$ خاصية معينة P ، حيث P خاصية جبرية ما .في هذا البحث قمنا بإيجاد الشروط اللازمة والكافية حتى تكون حلقة شبه الزمرة منتظمة ،وهل هذه الشروط كافية او لازمة حتى تكون حلقة شبه الزمرة π - منتظمة حسب مفهوم فون نيومان .

1- مقدمة :
لقد درست خواص الانتظام لحلقات الزمر Group Rings بشكل مستفيض منذ ستينات القرن الماضي حيث أوجد كل من كونل I.connell و لامبك J.Lambek الشروط اللازمة والكافية حتى تكون حلقة الزمرة Group Ring منتظمة [6].

تعريف 1.1 [5]
لتكن S مجموعة غير خالية ولتكن (.) عملية ثنائية على S . نسمي النظام $(S , .)$ شبه زمرة (Semigroup) اذا تحقق الشرط التالي :

$$a . (b . c) = (a . b) . c \qquad \forall a , b , c \in S$$

تعريف 2.1
نقول أن العنصر a في حلقة A انه منتظم حسب مفهوم فون نيومان (Von Neumann) إذا تحقق الشرط التالي :

$$\exists\ b \in A \ ; \ a = a b a$$

*كما نقول عن حلقة A إنها منتظمة حسب مفهوم فون نيومان إذا كانت جميع عناصرها منتظمة حسب مفهوم فون نيومان .

- نستخدم الكلمة " منتظمة " regular للدلالة على الانتظام حسب مفهوم فون نيومان دون الإشارة إلى ذلك .

مبرهنة 3.1 [2]
إذا تحقق أحد الشروط التالية تكون الحلقة A منتظمة :

1- إذا كانت أي مثالية رئيسة إلى اليمين (إلى اليسار) في A مولدة بعنصر جامد (متساوي القوة) Idempotent Element.
2- إذا كانت أي مثالية إلى اليمين (إلى اليسار) منتهية التولد Finitely Generated في A مولدة بجامد (متساوي القوة) .
3- إذا وجدت مثالية I من A بحيث أن كلاً من I و A / I حلقة منتظمة .
4- إذا كانت A حلقة شبه بسيطة .
5- اذا كانت A حلقة ابدالية ومختزلة وكانت كل مثالية اولية Prime Ideal من A اعظمية Maximal.
6- إذا كانت A / P حلقة منتظمة لأي مثالية أولية P من A وكانت A حلقة جامدة (متساوية القوة) كلياً .
7- لأي مثالية منتهية التوليد I من A يوجد مثالية J من A بحيث $A = J \oplus I$.

8- يوجد n بحيث أن $M_n(A)$ منتظمة .

تعريف 4.1 [2]

نقول إن العنصر a في حلقة A إنه π - منتظم إذا وجد عدد صحيح موجب n بحيث يكون
$a^n \in a^n A a^n$

* نقول عن حلقة A انها π - منتظمة إذا كانت عناصر A جميعها π - منتظمة .
*من الآن فصاعد استخدامنا " حلقة π - منتظمة " سيدل على أن A حلقة π - منتظمة و ذات دليل انعدام قوة منته (Bounded index of nilpotent).

مبرهنة 5.1 [2]

إذا كانت A حلقة وكان أحد الشروط التالية متحققاً فان A حلقة π - منتظمة .
1- إذا كانت أي مثالية رئيسة إلى اليمين (إلى اليسار) في A مولدة بجامد.
2- إذا كانت أي مثالية إلى اليمين (إلى اليسار) منتهية التوليد في A مولدة بعنصر جامد (متساوي القوة).
3- إذا وجدت مثالية I من A بحيث أن كلاً من I و A / I حلقة منتظمة .
4- إذا كانت A مجموعاً مباشراً منتهياً (Finite direct sum) لحلقات منتظمة .
5- إذا كانت A حلقة شبه بسيطة .
6- اذا كانت A حلقة ابدالية وخزولة وكانت كل مثالية اولية من A اعظمية.
7- إذا كانت A / P حلقة منتظمة لأي مثالية أولية P من A وكانت A حلقة جامدة كلياً .
8- لأي مثالية منتهية التوليد I من A يوجد مثالية J من A بحيث $A = J \oplus I$.
9- يوجد n بحيث أن $M_n(A)$ منتظمة .

تعريف 6.1

إذا كانت A حلقة ما فإننا نعرف جذر الإنتظام $r(A)$ للحلقة A (Regular Radical) كما يلي:

$r(A) = \{ b \in A \;;\; AbA$ حلقة منتظمة$\}$

ملاحظات 6.1 [10]

1- إذا كانت $S \cong M(G^0, N, N, P)$ بحيث تكون المصفوفة P قابلة للقلب (INVERTIBLE) في الحلقة $M_n(A[G])$ وكانت $A_O[S]$ حلقة واحدية فان

$$A[S] \cong M_n(A[G])$$

2- إذا كانت A حلقة ارتينية إلى اليمين (إلى اليسار) وكانت S شبه زمرة منتهية فان $A[S]$ حلقة ارتينية إلى اليمين (إلى اليسار) .
3- إذا كانت S شبه زمر ابدالية ملتفة وكانت A حلقة ابدالية فان :
كل مثالية أولية من $A[S]$ اعظمية إذا وفقط اذا كانت كل مثالية اولية من A اعظمية .
4- إذا كانت $A[S]$ حلقة ابدالية وكانت I مثالية منعدمة من A فان $I[S]$ مثالية منعدمة من $A[S]$.

بعض خصائص الحلقات π - منتظمة 7.1

إذا كانت A حلقة π - منتظمة فان :
1- لكل $a \in A$ يوجد عدد صحيح موجب n بحيث $a^n \in a^{n+1}A$.[4].
2- لكل عدد صحيح موجب n تكون حلقة المصفوفات $M_n(A)$ حلقة π - منتظمة .[4].
3- كل من I و A / I حلقة π - منتظمة لأي مثالية I من A .[4].

4- إذا كانت A حلقة شبه ابدالية فان A / N_A حلقة منتظمة .[1].

تمهيدية 8.1 [9]

إذا كانت S شبه زمرة عكسية تحوي صفراً ، فيها $E (S)$ مجموعة منتهية فإنها تملك سلسلة رئيسية بحيث أن كل عامل رئيسي في هذه السلسلة هو شبه زمرة 0 - بسيطة بشكل تام .

* أي أن كل عامل رئيسي هو شبه زمرة برا ندت .

2- حلقات أشباه الزمر المنتظمة Regular semigroup rings

- *سنستخدم الرمز A ليدل على حلقة واحدية وكذلك الرمز S ليدل على شبه زمرة .*

مبرهنة 1.2 [7]

إذا كانت G زمرة وكانت A حلقة فان حلقة الزمرة $A [G]$ تكون منتظمة إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية :

أ- A حلقة منتظمة .

ب- G زمرة منتهية محلياً .

ج- إذا كانت H زمرة جزئية منتهية من G فان رتبة H قابلة للقلب في A .

مبرهنة 2.2

إذا كانت S شبه زمرة تملك صفراً 0 وكانت A حلقة فان

$A_o [S]$ حلقة منتظمة $\Leftarrow$ A حلقة منتظمة و S شبه زمرة منتظمة

البرهان

أولا : نبين أن A حلقة منتظمة

لنأخذ $r \neq 0$ من A ولنأخذ $s \neq 0$ من S واضح أن $r s \in A_o [S]$ وبالتالي يوجد

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i$$

من $A_o [S]$ بحيث

$$r s = (r s) x (r s)$$

ومنه

$$r s = (r s)(\sum_{i=1}^{n} a_i s_i)(r s)$$

إذن

$$s \; r s = \sum_{i=1}^{n} r a_i \; r \; s s_i$$

الآن لنعرف المجموعة

$$\Delta = \{ i \in \{ 1 , \dots , n \} \;\; ; \; s = s s_i s , a_i \neq 0 \}$$

إذن

$$r s = \sum_{i \in \Delta} r a_i \; r \; s$$

ملحق بحوث مجلة القادسية للعلوم الصرفة المجلد 15العدد 4 سنة 2010
(ISSN 1997-2490)

(لأن عناصر S مستقلة خطياً على A)
ومنه

$$s\ r\ s = (\sum_{i \in \Delta} r\, a_i\, r\ )$$

وبالتالي يكون لدينا

$$r = r\,(\sum_{i \in \Delta} a_i\ )\ r$$

ولأن

$$\sum_{i \in \Delta} a_i$$

من A فان r عنصر منتظم ، وبالتالي تكون A حلقة منتظمة .
ثانياً : نبين أن S شبه زمرة منتظمة :
لنأخذ $s \in S$ إذا كان s محايداً أو صفراً فانه منتظم
لنفرض أن s ليس صفراً وليس محايداً .
وليكن $a \neq 0$ عنصراً من A فيكون $a\,s \in A_o[\,S\,]$ لكن $A_o[\,S\,]$ حلقة منتظمة
إذن يوجد

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i\, s_i$$

من $A_o[\,S\,]$ بحيث :

$$a\,s = a\,s\,x\,a\,s$$

ومنه

$$a\,s = a\,s\,(\sum_{i=1}^{n} a_i\, s_i\ )\,a\,s$$

أي

$$a\,s = \sum_{i=1}^{n} a\,s\,a_i\,s_i\,a\,s$$

ومنه

$$a\,s = \sum_{i=1}^{n} a\,a_i\,a\,s\,s_i\,s$$

لأن $a\,s = s\,a$ لأي $a \in A$ و $s \in S$
ومنه

ملحق بحوث مجلة القادسية للعلوم الصرفة المجلد 15العدد 4 سنة 2010
(ISSN 1997-2490)

$a\ a_i\ a\ s\ s_i\ s \in \mathrm{Supp}\,(\sum_{i=1}^{n} \quad s)$

أي يوجد

$1 \le j \le n$

بحيث

$s = s\ s_j\ s$

وبالتالي يكون s عنصراً منتظماً ولأن s عنصراً كيفياً (اختياري) فان S شبه زمرة منتظمة .

مبرهنة 3.2

إذا كانت S شبه زمرة وكانت A حلقة فان

$A\,[\,S\,]$ حلقة منتظمة $\Leftrightarrow$ $A_o\,[\,S\,]$ حلقة منتظمة

البرهان

$\Rightarrow$:

أولا : إذا كانت S شبه زمرة لا تحوي صفراً 0

في هذه الحالة يكون لدينا $A\,[\,S\,] = A_o\,[\,S\,]$ وبالتالي يتحقق المطلوب

ثانياً : لنفرض أن S شبه زمرة تحوي صفراً 0

من مبرهنة 3.4 [2] نجد أن

$$A\,[\,S\,] \cong A_o\,[\,S\,] \oplus A0 \quad \ldots\ldots. \quad (*)$$

لنفرض أن $A_o\,[\,S\,]$ حلقة منتظمة نجد من مبرهنة (2.2) أن A حلقة منتظمة وواضح أن $A \cong A0$ إذن A0 حلقة منتظمة ، ومن (*) تكون $A\,[\,S\,]$ جمع مباشر لحلقتين منتظمتين .

ونجد من (5.1 ، 4) أن $A\,[\,S\,]$ حلقة منتظمة .

$\Leftarrow$:

لنفرض أن $A\,[\,S\,]$ حلقة منتظمة، من تعريف $A_o[S]$ نجد أن :

$$A\,[\,S\,] / A0 \cong A_o\,[\,S\,]$$

لكن نعلم أن $A \cong A0$ و بحسب المبرهنة (2.2) نجد أن A حلقة منتظمة وبالتالي A0 منتظمة . وبما أن $A\,[\,S\,]$ حلقة منتظمة فمن (مبرهنة 4.5 [10]) نجد أن $A\,[\,S\,] / A0$ منتظمة وبالتالي $A_o\,[\,S\,]$ حلقة منتظمة .

* ينتج عن المبرهنة (3.2) أنه لا فرق في دراسة الانتظام على أي من الحلقتين $A\,[\,S\,]$ و $A_o\,[\,S\,]$ لذلك سندرس من الآن فصاعداً الانتظام على حلقات أشباه الزمر المتقلصة $A_o\,[\,S\,]$ Contracted Semigroup Ring بحيث يكون الرمز S يدل على شبه زمرة تملك صفر 0 .

تمهيدية 4 .2

لتكن

$$S = S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \ldots \supset S_m \supset S_{m+1} = \{0\}$$

سلسلة رئيسة في شبه زمرة S ولتكن A حلقة فان

$A_o\,[\,S\,]$ منتظمة $\Leftrightarrow$ $A_o\,[\,S_i / S_{i+1}\,]$ حلقة منتظمة لكل $i = 1, \ldots, m$

البرهان

$\Rightarrow$: لنفرض أن $A_o [S_i / S_{i+1}]$ حلقة منتظمة لكل $i= 1 , \ldots , m$

لناخذ $i = m$ فان $S_m / S_{m+1} = S_m$ أي ان $A_o [S_m]$ حلقة منتظمة ، لكن $A_o [S_m]$ مثالية في $A_o [S_{m-1}]$

وكذلك $A_o [S_{m-1} / S_m] \cong A_o [S_{m-1}] / A_o [S_m]$

ومنه $A_o [S_{m-1} / S_m]$ حلقة منتظمة ومن (5.1 ، فقرة 3) نجد أن $A_o [S_{m-1}]$ حلقة منتظمة .

وبنفس الطريقة نصل إلى أن $A_o [S_1]$ منتظمة أي أن $A_o [S]$ حلقة منتظمة

$\Leftarrow$ لنفرض أن $A_o [S]$ حلقة منتظمة أي أن $A_o [S_1]$ حلقة منتظمة ،عندئذ نجد من (مبرهنة 4.5 [10]) أن كلاً من $A_o [S_2]$ و $A_o [S_1] / A_o [S_2]$ حلقة منتظمة لأن $A_o [S_2]$ مثالية من $A_o [S_1]$.

لكن $A_o [S_1 / S_2] \cong A_o [S_1] / A_o [S_2]$ أي أن $A_o [S_1 / S_2]$ حلقة منتظمة .

وبنفس الطريقة نصل إلى أن $A_o [S_i / S_{i+1}]$ حلقة منتظمة لكل $i= 1 , \ldots , m$.

تمهيدية 5.2

إذا كانت A حلقة ما وكانت S شبه زمرة فان :

$A_o [S]$ حلقة منتظمة $\Leftarrow A [G]$ حلقة منتظمة لكل زمرة جزئية G من S .

تمهيدية 6.2

إذا كانت A حلقة وكانت S شبه زمرة بحيث أن كل مجموعة جزئية منتهية T من S تكون محتواة في شبه زمرة جزئية S_T من S تكون لأجلها حلقة شبه الزمرة

$A_o [S_T]$ منتظمة فان $A_o [S]$ منتظمة .

البرهان

ليكن $x \in A_o [S]$ ولنبرهن أن x عنصر منتظم .

لنأخذ $T = Supp (x)$ ، نعلم أن T مجموعة جزئية منتهية من S . إذن يوجد S_T شبه زمرة جزئية من S بحيث تكون $A_o [S_T]$ حلقة منتظمة ولكن $x \in A_o [S_T]$ وبالتالي يوجد $y \in A_o [S_T]$ يحقق $x = x y x$

لكن $x , y \in A_o [S_T] \subset A_o [S]$ وبالتالي يكون x عنصراً منتظماً في $A_o [S]$ وبالتالي $A_o [S]$ حلقة منتظمة .

نتيجة 7.2

إذا كانت A حلقة وكانت S شبه زمرة بحيث أن كل مجموعة جزئية منتهية T من S تكون محتواة في شبه زمرة جزئية S_T من S وبحيث أن S_T تملك سلسلة رئيسية

$$S_T = S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \ldots \supset S_m \supset S_{m+1} = \{0\}$$

يكون لأجلها $A_o [S_i / S_{i+1}]$ حلقة منتظمة لكل $i= 1 , \ldots , m$ فان $A_o [S]$ منتظمة .

البرهان

بما أن $A_o [S_i / S_{i+1}]$ حلقة منتظمة لكل $i= 1 , \ldots , m$ فانه ينتج من التمهيدية (4.2) أن $A_o [S_T]$ حلقة منتظمة ومن التمهيدية (6.2) نجد أن $A_o [S]$ منتظمة .

تمهيدية 8.2 [8]
إذا كانت

$$S \cong M^o (G , I , \wedge , P)$$

شبه زمرة 0 - بسيطة بشكل تام وكانت $A_o [S]$ حلقة واحدية (P مصفوفة من $A [G]$ قابلة للقلب) فان :
$A_o [S]$ منتظمة إذا وفقط إذا $A [G]$ منتظمة

تمهيدية 9.2
إذا كانت A حلقة وكانت S شبه زمرة فان $A_o [S]$ حلقة منتظمة إذا تحققت الشروط التالية :
أ - A حلقة منتظمة .
ب - أي مجموعة جزئية منتهية T من S محتواة في شبه زمرة جزئية S_T تملك سلسلة رئيسية .
جـ- أي عامل رئيسي Q من S_T يحقق

$$Q \cong M (G^o , I , \wedge , P)$$

حيث P مصفوفة من $A [G]$ قابلة للقلب و $A [G]$ حلقة منتظمة .

البرهان
لنأخذ $x \in A_o [S]$. سنبين أن x عنصر منتظم.
إن $T = Supp (x)$ مجوعة منتهية من S ولذلك يوجد شبه زمرة جزئية S_T من S حيث أن S_T تملك سلسلة رئيسية

$$S_T = S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \ldots \supset S_m \supset S_{m+1} = \{0\}$$

وبحيث أن

$$S_i / S_{i+1} \cong M (G^0 , I , \wedge , P)$$

(أي أن S_i / S_{i+1} 0- بسيطة بشكل تام) لكل $i = 1 , \ldots , m$ حيث P مصفوفة من $A [G]$ قابلة للقلب ، وبما أن $A [G]$ حلقة منتظمة من الفرض فإننا نجد من التمهيدية (8.2) أن $A_o [S_i / S_{i+1}]$ حلقة منتظمة لكل $i = 1 , \ldots , m$
وبالتالي تكون $A_o [S_T]$ منتظمة بحسب التمهيدية (4.2)
ونجد من التمهيدية (6.2) أن $A_o [S]$ حلقة منتظمة .

تمهيدية 10.2
إذا كانت A حلقة ، وكانت S شبه زمرة عكسية فان $A_o [S]$ حلقة منتظمة إذا تحققت الشروط التالية :
أ - A حلقة منتظمة .
ب - أي مجموعة جزئية منتهية T من S محتواة في شبه زمرة جزئية عكسية ومنتهية S_T من S .
جـ- رتبة أي زمرة جزئية منتهية من S قابلة للقلب في A .

البرهان
سنبرهن هذه التمهيدية من خلال تحقيق شروط التمهيدية 9.2 .
لنبين أن الشرطين ب ، ج في التمهيدية 9.2 متحققين :
لنأخذ T مجموعة جزئية منتهية من S عندئذ ينتج عن الفرض انه يوجد شبه زمرة جزئية عكسية منتهية S_T بحيث $T \subseteq S_T$
ومنه فان S_T تملك سلسلة رئيسية و كل عامل رئيسي Q من هذه السلسلة هو شبه زمرة عكسية 0- بسيطة بشكل تام ومنتهية أي أن Q شبه زمرة برا ندت ومن (9.2) نجد أن $Q \cong M^o (G , n , n , P)$ حيث P هي $n \times n$ - مصفوفة محايدة و G زمرة جزئية من Q .
الآن G منتهية لأن Q شبه زمرة منتهية ومن (ج) نجد أن رتبة G قابلة للقلب في A ومن مبرهنة (1.2) نجد أن $A [G]$ حلقة منتظمة .
وبهذا تكون الشروط أ ، ب ، ج من التمهيدية (9.2) قد تحققت وبالتالي $A_o [S]$ حلقة منتظمة .
تمهيدية 11.2

ملحق بحوث مجلة القادسية للعلوم الصرفة المجلد 15العدد 4 سنة 2010
(ISSN 1997-2490)

إذا كانت A حلقة وكانت S شبه زمرة بحيث أن أي مجموعة جزئية منتهية T من S محتواة في شبه زمرة جزئية عكسية ومنتهية S_T من S فان الشروط التالية متكافئة .

أ - $A_o [S]$ حلقة منتظمة

ب - $A [G]$ حلقة منتظمة لكل زمرة جزئية G من S

جـ A حلقة منتظمة ورتبة أي زمرة جزئية منتهية في S قابلة للقلب في A .

البرهان

أ $\Leftarrow$ ب من تمهيدية (5.2)

ب $\Leftarrow$ ج من تمهيدية (1.2)

ج $\Leftarrow$ أ من تمهيدية (10.2) نجد أن S عكسية وبالتالي تحقق شروط التمهيدية (10.2) وبالتالي تكون $A_o [S]$ حلقة منتظمة .

تمهيدية 12.2

إذا كانت A حلقة وكانت S شبه زمرة عكسية فيها $E (S)$ مجموعة منتهية فان الشروط التالية متكافئة .

أ - $A_o [S]$ حلقة منتظمة

ب- $A [G]$ حلقة منتظمة لكل زمرة جزئية G من S .

البرهان

أ $\Leftarrow$ ب من التمهيدية (5.2)

ب $\Leftarrow$ أ من التمهيدية (8.1) نجد أن S تملك سلسلة رئيسية

$$S_T = S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \dots \supset S_m \supset S_{m+1} = \{0\}$$

بحيث أن S_i / S_{i+1} شبه زمرة برا ندت لكل $i= 1 , \dots , m$ وكذلك $A_o [S_i / S_{i+1}]$ واحدية لكل $i= 1 , \dots , m$ أي ان

$$S_i / S_{i+1} \cong M (G^o i , n_i , n_i , P_i)$$

حيث n_i عدد صحيح موجب لكل $i= 1 , \dots , m$ و P_i مصفوفة قابلة للقلب في

$$M_{n_i} (A [G_i])$$

ومنه نجد أن :

$$A_o [S_i / S_{i+1}] \cong M_{n_i} (A [G_i])$$

لكل $i= 1 , \dots , m$

لكن من الشرط (ب) $A [G_i]$ حلقة منتظمة لكل $i= 1 , \dots , m$

ومن (5.1 فقرة 9) نجد أن

$M_{n_i} (A [G_i])$ حلقة منتظمة لكل $i= 1, \dots ,m$

وبالتالي تكون $A_o [S_i / S_{i+1}]$ حلقة منتظمة لكل $i= 1 , \dots , m$

ومن التمهيدية (4.2) نجد أن $A_o [S]$ حلقة منتظمة .

نتيجة 13.2

إذا كانت S شبه زمرة عكسية ومنتهية و كانت A حلقة فان الشروط التالية متكافئة .

أ - $A_o[S]$ حلقة منتظمة
ب- $A_o[G]$ حلقة منتظمة لكل زمرة جزئية G من S .

البرهان
بما ان S منتهية فان $E(S)$ منتهية ونعود إلى التمهيدية السابقة .

نظرية 14.2 [5]
إذا كانت S شبه زمرة ابدالية وكانت A حلقة واحدية فان :
$r(A)[S] = r(A[S])$ إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان :
أ - $S = \bigcup_{\alpha\in\wedge} G_\alpha$ حيث G_α زمر منتهية لكل $\alpha \in \wedge$

ب- m لا يقسم $|G_\alpha|$ لكل $\alpha \in \wedge$ حيث m عدداً طبيعياً يوجد لأجله عنصر x من A يحقق $m.x = 0$.

*حيث $r(A)$ هو جذر الإنتظام للحلقة A .

تمهيدية 15.2
إذا كانت S شبه زمرة ابدالية وكانت A حلقة واحدية فان $A[S]$ منتظمة إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان :
أ - $S = \bigcup_{\alpha\in\wedge} G_\alpha$ حيث G_α زمر منتهية لكل $\alpha \in \wedge$
ب- $|G_\alpha| \in U_A$ لكل $\alpha \in \wedge$

البرهان
$\Leftarrow$:
إذا كانت $A[S]$ منتظمة فان A منتظمة بحسب (2.2) ولذلك فان
$r(A) = A$ كما أن $r(A[S]) = A[S]$ ومنه $r(A[S]) = A[S] = r(A)[S]$
وبالتالي يتحقق الشرط (أ) من النظرية 14.2 أي أن $S = \bigcup_{\alpha\in\wedge} G_\alpha$ حيث لكل $\alpha \in \wedge$ ، G_α زمرة جزئية منتهية من S وبالتالي نجد من (5.2) أن
$A[G_\alpha]$
حلقة منتظمة لكل $\alpha \in \wedge$ وبالتالي نجد ان
$|G_\alpha| \in U_A$.

$\Rightarrow$:
لتكن S شبه زمرة ابدالية بحيث $S = \bigcup_{\alpha\in\wedge} G_\alpha$ و G_α زمرة منتهية لكل $\alpha \in \wedge$ وليكن $U_A \ni |G_\alpha|$ لكل $\alpha \in \wedge$.
عندئذ نجد أن الشرط (أ) من النظرية 14.2 متحقق ، ولنبين أن الشرط الثاني متحقق ؛ لتكن $\alpha \in \wedge$ ولنفرض انه يوجد $m \in N$ بحيث m يقسم $|G_\alpha|$ ويوجد $x \in A$ بحيث $m.x = 0$

عندئذ m يقسم $|G_\alpha| \Leftarrow |G_\alpha| = m\,k \;;\; k \in N$

ومنه

$$|G_\alpha|\,x = m\,k\,x = k\,(m\,x) = k\,0 = 0$$

أي أن $|G_\alpha|$ قاسم للصفر وبالتالي $|G_\alpha| \notin U_A$ وهذا يتناقض مع الفرض .

إذن الشرط (ب) من النظرية أعلاه متحقق وبالتالي نجد أن $r(A[S]) = r(A)[S]$

ولكن $r(A)[S] = A[S]$ لأن $r(A) = A$ (A حلقة منتظمة بالفرض)

ومنه $r(A[S]) = A[S]$ ونجد أن $A[S]$ حلقة منتظمة.

3 - حلقات أشباه الزمر π - منتظمة π-Regular semigroup rings

مبرهنة 1.3

إذا كانت A حلقة ما وكانت S شبه زمرة تحوي صفراً فان :

$A_o[S]$ حلقة π- منتظمة $\Leftarrow$ $A[G]$ حلقة π- منتظمة لكل زمرة جزئية G من S

البرهان

لنفرض أن G زمرة جزئية من S عنصرها المحايد e .

وليكن $r \in A[G]$ عنصراً ليس عديم قوة (إذا كان عديم قوة فهو π- منتظم).

عندئذ نجد أن $r \in A_o[S]$ ومن الفرض لدينا $A_o[S]$ حلقة π- منتظمة ولذلك يوجد

$x \in A_o[S]$ ويوجد عدد صحيح موجب n بحيث $r^n = r^n\,x\,r^n$

لكن $r^n \in A[G]$ إذن $r^n = r^n e = e\,r^n$ وبالتالي يكون

$r^n = (r^n e)\,x\,(e\,r^n) = r^n\,(e\,x\,e)\,r^n$ لكن $(e\,x\,e) \in A_o[S]$ ولذلك فانه يكتب على الشكل

$$e\,x\,e = \sum_{s\in S} a_s\, s$$

لكل $s \in S$ بحيث $a_s \neq 0$ يكون $s \in Supp(x)$ ومنه يوجد $s' \in S$ بحيث $s = e\,s'\,e$

وينتج عن هذا أن :

$$e\,s\,e = e\,(e\,s'\,e)\,e = (e\,e)\,s'\,(e\,e) = e\,s'\,e = s \quad \ldots\ldots\ldots.(*)$$

الآن لنكتب $e\,x\,e$ على الشكل

$$e\,x\,e = \sum_{s\in S} a_s\, s = \sum_{s\in G} a_s\, s + \sum_{s\notin G} a_s\, s$$

عندئذ نجد أن :

$$r^n = (r^n e)(x)(e\,r^n) = r^n (e\,x\,e)\, r^n$$
$$= r^n \Big(\sum_{s\in G} a_s\, s\Big) r^n + r^n \Big(\sum_{s\notin G} a_s\, s\Big) r^n$$

لتكن S_1 معرفة كما يلي :

$$S_1 = Supp\Big(r^n \Big(\sum_{s\notin G} a_s\, s\Big) r^n\Big)$$

لنفرض ان $S_1 \bigcap G \neq \phi$ عندئذ يوجد $s \notin G$ و $g_1 , g_2 , g_3 \in G$ بحيث

$$g_3 = g_1 \, s \, g_2$$

ومنه

$$g_1^{-1} \, g_3 \;\; g_2^{-1} = e \, s \, e$$

ولكن من (*) نجد ان

$$g_1^{-1} \, g_3 \;\; g_2^{-1} = e \, s \, e = s$$

ومنه $g_1^{-1} \, g_3 \;\; g_2^{-1} \notin G$ لأن $s \notin G$ وهذا تناقض إذن

$$\bigcap \; G = \phi \; S_1$$

وبالتالي يكون

$$r^n \left(\sum_{s \notin G} a_s \, s \right) r^n = 0 \quad \text{في} \quad A[G].$$

اذن

$$r^n = r^n \left(\sum_{s \in G} a_s \, s \right) r^n + 0 = r^n \left(\sum_{s \in G} a_s \, s \right) r^n$$

ومنه $A[G]$ حلقة π- منتظمة لأن

$$A[G] \in .s \;\; {}_s a \sum_{s \in G}$$

مبرهنة 2.3

اذا كانت A حلقة واحدية وكانت S شبه زمرة صفرها $\{0\}$ وإذا كانت $A [S]$ حلقة π- منتظمة فان $A_o [S]$ حلقة π- منتظمة .

البرهان

لنفرض أن $A [S]$ حلقة π- منتظمة

نعلم ان $A0$ مثالية في $A [S]$ وبالتالي تكون حلقة القسمة $A [S] / A0$ حلقة π- منتظمة بحسب (7.1 فقرة 3)

ولأن $A_o [S] = A [S] / A0$ فان $A_o [S]$ حلقة π- منتظمة .

مبرهنة 3.3

اذا كانت A حلقة واحدية وكانت S شبه زمرة تحوي على الأقل عنصراً جامداً (متساوي القوة) (بشكل خاص S تحوي عنصر واحدي) غير الصفر فان :

$A_o [S]$ حلقة π- منتظمة $\Leftarrow$ $A [S]$ حلقة π- منتظمة .

البرهان

ليكن e عنصراً جامداً في S نجد ان $G = \{ e \}$ هي زمرة جزئية من S وبحسب (1.3) نجد ان Ae حلقة π- منتظمة لكن $A \cong Ae$ وبالتالي A حلقة π- منتظمة وكذلك $A0$ حلقة π- منتظمة لان $A0 \cong A\theta$ لكن $A\theta$ مثالية في $A[S]$ ،
إذن كلاً من $A0$ و $A_o[S] = A[S] / A0$ حلقة π- منتظمة وبحسب (3.1 فقرة3) تكون $A[S]$ حلقة π- منتظمة .
الاتجاه الآخر ينتج مباشرة من المبرهنة 1.3

مبرهنة 4.3

لتكن

$$S = S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \ldots \supset S_m \supset S_{m+1} = \{0\}$$

سلسلة رئيسة في شبه زمرة S ولتكن A حلقة واحدية عندئذ
$A_o[S]$ حلقة π- منتظمة $\Leftrightarrow$ $A_o[S_i / S_{i+1}]$ حلقة π- منتظمة لكل $i= 1 , \ldots , m$

البرهان

$\Rightarrow$: لنفرض ان $A_o[S_i / S_{i+1}]$ حلقة π- منتظمة لكل $i= 1 , \ldots , m$
$A[S_m]$ هي اذن $S_{m+1} = \{0\}$ لأن $S_m / S_{m+1} = S_m$ هي حلقة π- منتظمة لكن $A_o[S_m / S_{m+1}]$ اذن $A_o[S_m]$حلقة π- منتظمة ونعلم ان $A_o[S_m]$ مثالية في $A_o[S_{m-1}]$ وكذلك $A_o[S_{m-1} / S_m] \cong A_o[S_{m-1}] / A_o[S_m]$

اذن $A_o[S_{m-1} / S_m]$ حلقة π- منتظمة ومن (3.1 فقرة 3) نجد ان $A_o[S_{m-1}]$ حلقة π- منتظمة.
وبنفس الطريقة نصل الى أن $A_o[S]$ حلقة π- منتظمة .
$\Leftarrow$: لنفرض ان $A_o[S]$ حلقة π- منتظمة أي ان $A_o[S_1]$ حلقة π- منتظمة.
عندئذ نجد من (7.1 فقرة 3) ان كلاً من $A_o[S_2]$ و $A_o[S_1] / A_o[S_2]$
حلقة π- منتظمة (لأن$A_o[S_2]$ مثالية من $A_o[S_1]$)
لكن $A_o[S_1 / S_2] \cong A_o[S_1] / A_o[S_2]$ ومنه $A_o[S_1 / S_2]$ حلقة π- منتظمة .
وبنفس الطريقة نصل الى ان $A_o[S_i / S_{i+1}]$ حلقة π- منتظمة لكل $i= 1 , \ldots , m$.

مبرهنة 5.3 [9]

إذا كانت A حلقة بحيث ان $A \neq N_A$ وكانت S شبه زمرة فان
$A_o[S]$ حلقة π- منتظمة $\Leftarrow$ S شبه زمرة ملتفة

مبرهنة 6.3

إذا كانت $S \cong M^o(G, n, n, P)$ حيث P مصفوفة محايدة من $A[G]$ وكانت A حلقة واحدية فان :
$A_o[S]$ حلقة π- منتظمة $\Leftrightarrow$ $A[G]$ حلقة π- منتظمة لكل زمرة جزئية G من S

البرهان

من (6.1 ، فقرة 1) نجد أن :

$$A_o[S] \cong M_n(A[G])$$

وبالتالي $A_o[S]$ حلقة π- منتظمة $\Leftrightarrow$ $M_n(A[G])$ حلقة π- منتظمة $\Leftrightarrow$ $A[G]$ حلقة π- منتظمة
بحسب (3 .1 فقرة 4) .

مبرهنة 7.3

اذا كانت A حلقة ابدالية و $N_A \neq A$ وكانت S شبه زمرة ابدالية فان الشرطين التاليين متكافئين :
أ- $A[S]$ حلقة π- منتظمة

ب- S شبه زمرة ملتفة و A حلقة π- منتظمة .

البرهان

أ $\Leftarrow$ ب من المبرهنة (1.3) نجد ان A حلقة π- منتظمة

ومن المبرهنة (5.3) نجد ان S شبه زمرة ملتفة .

ب $\Leftarrow$ أ بما أن A حلقة π- منتظمة فانه ينتج من (3.1 فقرة 6) أن A / N_A حلقة منتظمة ، ولأن A / N_A حلقة منتظمة وابدالية فإن أي مثالية أولية من A / N_A أعظمية وبما أن S ملتفة فانه ينتج من (6.1 فقرة 3) أن كل مثالية أولية في

$(A / N_A) [S]$ أعظمية ومنه $(A / N_A) [S]$ حلقة π- منتظمة بحسب المبرهنة (3.1 فقرة 6) . لكن $(A / N_A) [S] \cong A [S] / N_A [S]$.

ولذلك فان $A [S] / N_A [S]$ حلقة π- منتظمة

وكذلك $N_A [S]$ مثالية منعدمة في $A [S]$ (6.1 فقرة 4) وبالتالي تكون $N_A[S]$ حلقة π- منتظمة ومن (3.1 فقرة 3) نجد أن $A [S]$ حلقة π- منتظمة .

مبرهنة 8.3

اذا كانت A حلقة شبه محلية وكانت S شبه زمرة منتهية فان الشرطين التاليين متكافئان

أ- $A [S]$ حلقة π- منتظمة

ب- $J (A) [S]$ حلقة π- منتظمة

البرهان

أ $\Leftarrow$ ب : نعلم أن $J (A)$ مثالية من A وبالتالي تكون $J (A) [S]$ مثالية من $A [S]$ ومن (7.1 فقرة 3) نجد أن $J (A) [S]$ حلقة π- منتظمة .

ب $\Leftarrow$ أ : بما أن A حلقة شبه محلية فان $A / J (A)$ حلقة أرتينية وبما أن S شبه زمرة منتهية فانه ينتج عن (6.1 فقرة 2) أن $A / J (A) [S]$ حلقة أرتينية ، ومن (3.1 فقرة 2) نجد أن $A / J (A) [S]$ حلقة π- منتظمة .

لكن

$$A / J (A) [S] \cong A [S] / J (A) [S]$$

وبالتالي يكون كل من $J (A) [S]$ و $A_o [S] / J (A) [S]$ حلقة π- منتظمة وينتج عن (3.1 فقرة 3) أن $A [S]$حلقة π- منتظمة .

مبرهنة 9.3

اذا كانت A حلقة ما وكانت S شبه زمرة بحيث أن كل مجموعة جزئية منتهية T من S محتواة في شبه زمرة جزئية S_T تكون لأجلها حلقة شبه الزمرة $A_o [S_T]$ حلقة π- منتظمة فان $A_o [S]$ حلقة π- منتظمة .

البرهان

لنأخذ $x \in A_o [S]$ عندئذ تكون $T = Supp (x)$ مجموعة جزئية منتهية من S وبحسب الفرض يوجد شبه زمرة جزئية S_T من S بحيث ان $A_o [S_T]$ تكون حلقة π- منتظمة .

لكن $x \in A_o [S_T]$ ولذلك يوجد عدد طبيعي n ويوجد $y \in A_o [S_T]$ بحيث

$$x^n = x^n y x^n$$

لكن $y \in A_o [S_T] \subseteq A_o [S]$ اذن x عنصر π-منتظم في $A_o [S]$ وبالتالي تكون $A_o [S]$ حلقة π- منتظمة .

References:

1- Badawi,A., On Semicommutative π-Regular Rings ,comm. in algebra,22(1) ,1994,PP.151-157 .
2- Goodearl, K.R., Von Neumman Regular Rings, Pitman, 1979.
3- Gopalakrishnan, H. On the Index of Nilpotency of Semigroup Graded Rings , Semigroup Forum , 62 , 2001, PP.146-158.
4- Gopalakrishnan, H. On the π-Regularity of Semigroup Graded Rings , Phd. Thesis ,Sacared Heart Univ., 1999.
5- Kelarev, A.V., On Regular Semigroup Rings, Semigroup Forum, 40, 1990, PP.155-156.
6- Lam, T.Y., A first Course in Noncommutative Rings , Springer-Verlag Inc. , New York , 1991.
7- Passaman , D.S., The Algebraic Structure of Group Rings , Wiley-Intersctience Series of Texts , Monographs & Tracts , New York , 1977.
8- Li,F.,On The Weak Regularity of Semigroup Rings,Semigroup Forum,48,1994, PP. 72-81.
9- Okninski, J., On Regular Semigroup Rings , Proc. Royal Soc. , Edinburgh , 99(A) ,1984, PP.145-151.
10- Okninski, J., Semigroup Algebras , Marcel Dekker Inc., New York , 1991.

REGULAR PROPERTIES OF SEMIGROUP RINGS

Sadiq A.Mehdi

ABSTRACT

Let A be a ring with unity and S be a semigroup . One of the most important problems in modern algebra is to find the sufficient and necessary conditions on A and S so that the semigroup ring A[S] has an algebraic property P .

In this paper , we have discussed this problem for the cases where P is (π- regular) in the sense of Von Neumann .