Using Exponential Finite Difference Method for Solve Kuramoto-Sivashinsky Equation with Numerical Stability Analysis

Abdulghafor M. Al-Rozbayani **Shrooq M. Azzo**
Department of Mathematics,
College of Computer Sciences and Mathematics,
University of Mosul, Iraq

Received on: 30/01/2013 **Accepted on: 03/04/2013**

ABSTRACT

In this paper we solved the Kuramoto-Sivashinsky Equation numerically by finite-difference methods, using two different schemes which are the Fully Implicit scheme and Exponential finite difference scheme, because of the existence of the fourth derivative in the equation we suggested a treatment for the numerical solution of the two previous scheme by parting the mesh grid into five regions, the first region represents the first boundary condition, the second at the grid point x1, while the third represents the grid points $x_2,x_3,\ldots x_{n-2}$, the fourth represents the grid point $x_{n-1}$and the fifth is the second boundary condition. We also, studied the numerical stability by Fourier (Von-Neumann) method for the two scheme which used in the solution on all mesh points to ensure the stability of the point which had been treated in the suggested style, we using two interval with two initial condition and the numerical results obtained by using these schemes are compare with Exact Solution of Equation Excellent approximate is found between the Exact Solution and numerical Solutions of these methods.

Keywords: Kuramoto-Sivashinsky Equation, Fully Implicit scheme, Exponential finite difference scheme, Von-Neumann method.

استخدام طريقة الفروقات المنتهية الأسية لحل معادلة Kuramoto-Sivashinsky مع تحليل الاستقرارية العددية

عبد الغفور محمد امين الروژبياني **شروق محمد عزّو**
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
جامعة الموصل، الموصل، العراق

تاريخ استلام البحث: 2013\01\30 **تاريخ قبول البحث: 2013\04\03**

الملخص

في هذا البحث تم حل معادلة Kuramuto-Sivashinsky بطرائق الفروقات المنتهية عددياً, وقد استخدمت طريقتان وهي الطريقة الضمنية الكاملة وطريقة الفروقات المنتهية الأسية, ولكون المعادلة تحتوي على المشتقة الرابعة فقد اقترحت معالجة للحل العددي للطريقتين, بتجزئة نقاط المشبك إلى خمس مناطق الأولى الشرط الحدودي الأول والثانية عند نقطة المشبك x_1 والثالثة عند نقاط المشبك $x_2,x_3,\ldots x_{n-2}$والرابعة نقطة المشبك x_{n-1}والخامسة الشرط الحدودي الثاني كما تم تحليل الاستقرارية العددية بطريقةFourier (Von-Neumann) للطريقتين المستخدمة في الحل وعلى نقاط المشبك كافة للتأكد من استقرارية النقاط التي عولجت بالأسلوب المقترح, وقد أخذت فترتان مختلفتان مع شرطين ابتدائيين ومقارنة النتائج العددية التي تم الحصول عليها باستخدام تلك الطريقتين مع الحل المضبوط للمعادلة وقد وجدت تقريباً ممتازاً بين الحل المضبوط والحلول العددية لتلك الطرائق.

الكلمات المفتاحية: معادلة Kuramuto-Sivashinsky, الطريقة الضمنية الكاملة , طريقة الفروقات المنتهية الأسية, طريقة فون نيومان.

1- المقدمة:

أصبحت المعادلات التفاضلية الجزئية أداة مفيدة لوصف الظواهر الطبيعية لنماذج العلوم والهندسة, لذلك أصبح من الضروري حل هذه المعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام الطرائق العددية والمتطورة, وتطبيق هذه الطرائق[15].

وتظهر المعادلات التفاضلية الجزئية في بعض فروع الرياضيات التطبيقية, وتعد الديناميكية السائلة للماء و ميكانيكية الكم و النظرية الكهرومغناطيسية أمثلة للمعادلات التفاضلية الجزئية, وتعد المعالجة التحليلية لهذه المعادلات عملية معقدة جداً,إذ تتطلب تطبيق الطرائق الرياضية المتقدمة, من ناحية أخرى أصبح استخدام الطرائق العددية البسيطة والكفوءة عموماً أسهل لإيجاد حلول تقريبية بما فيه الكفاية[12].

درس العديد من الباحثين معادلة Kuramoto-Sivashinskyبسبب تعقيدها وقدرتها على وصف تشكيلة كبيرة من الظواهر الطبيعية مثل استقرار جبهات الأغشية المنحدرة لذلك هذه المعادلة جذبت الكثير من الانتباه في المجاميع العلمية [3].

قام الباحثN.A. Kudryashovفي[7]باستخدام طريقة المعادلة الأسهل (simplest equation method) للبحث عن حلول مضبوطة (exact solution) من طريقة المعادلات التفاضلية غير الخطية الجديدة, وتقدم للبحث عن حلول مضبوطة من المعادلات التفاضلية غير الخطية, وهناك فكرتان أساسيتان في البحث إحداهما أن يستعمل الحلول العامة للمعادلات التفاضلية غير الخطية الأسهل, الفكرة الأخرى أن يأخذ بنظر الاعتبار المعادلات المفردة المحتملة للدرس, وتستعمل الطريقة لإيجاد حلول مضبوطة لمعادلة K.S. والمعادلة توصف الموجات غير الخطية في السائل الموصل للحرارة.

وقد حل الباحثانT. Mackenzie و A. J. Robertsفي [11]معادلة K.S. غير الخطية لتطوير تقريب الفروقات المنتهية إلى حركية, وكان التحليل مستنداً على النظرية المنوعة المركزية (center manifold theory) وقد كانوا مطمئنين لأن أنموذج الفروقات المنتهية تنظم الحركة بدقة وقد تُرتب بشكل منظم, إن النظرية تُطبق بعد تقسيم المجال الطبيعي إلى عناصر صغيرة بإدخال عناصر الحدود الداخلية التي تحذف لاحقاً, إن معادلة K.S. استعملت مثالاً لإثبات أن الفروقات المنتهية الشمولية قد تُطبق على معادلات الرتبة الرابعة غير الخطية, وقد أثبتوا أن النظرية المنوعة المركزية المبتكرة شمولية بمعنى أنها تعالج المعادلات الحركية ككل ليس فقط كمجموع الشروط المنفصلة.

أما الباحثانAl-Rawi و .Al-Bakerفي[1] فقد قاما بحل معادلة Korteweg-de Vries-Burger's باستخدام طريقتين من طرائق الفروقات المنتهية وهما الطريقة الضمنية الكاملة وطريقة الفروقات المنتهية الأسية, ودرسوا الاستقرارية العددية بطريقة (Fourier(Von-Neumann للطريقتين وعلى كافة نقاط المشبك, وقارنوا النتائج العددية التي تم الحصول عليها باستخدام تلك الطرائق مع نتائج الحل المضبوط, ووجدوا تقارباً بين الحل التحليلي والحلول العددية للطريقتين.

2- الأنموذج الرياضي

إن صيغة معادلة Kuramoto−Sivashinsky تكون على النحو الآتي [10] :

$$u_t = -uu_x - u_{xx} - u_{xxxx} \quad , [0,32\pi] \qquad \dots (1)$$

والشروط الحدودية هي

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) &= u(32\pi,t) = 1 && ,t \geq 0 \\ u_{xx}(0,t) &= u_{xx}(32\pi,t) = -\frac{1}{16^2} && ,t \geq 0 \end{aligned}\right\} \quad \dots (2)$$

مثال (1):الفترة هي [0,32π] والشرط الابتدائي هو[10]:

$$u(x,0) = cos\left(\frac{x}{16}\right)\left(1 + sin\left(\frac{x}{16}\right)\right) \quad \dots (3)$$

مثال (2): الفترة هي[30,30−] والشرط الابتدائي هو[5]:

$$u(x,0) = c + \frac{15}{19}\sqrt{\frac{11}{19}}\left(-9tanh\left(k(x-x_0)\right) + 11tanh^3\left(k(x-x_0)\right)\right) \quad \dots (4)$$

إذ إن $k = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{19}}\ , c = 1.2, x_0 = -12$

3− الحل العددي لمعادلةKuramoto-Sivashinsky:

تعد طريقة الفروقات المنتهية (Finite Differences Method) إحدى أكثر الطرائق الكلاسيكية في التحليل العددي للمعادلات التفاضليةوتعد إحدى أكثر التطبيقات أهمية, وتُشكل الفروقات المنتهية قاعدة التحليل العددي كما طبقت في طرائق عددية أخرى مثل التفاضل العددي والتكامل العددي. [13,14]

3-1اشتقاق صيغة الطريقة الضمنية الكاملة (Fully Implicit scheme) لمعادلة .K.S:

تسمى الطريقة بالضمنية إذ إن الحل في كل مستوي نتقدم فيه يحتاج إلى حل منظومة معادلات خطية ذات سعة (nxm) وأن النقاط المراد إيجاد الحل عندها في المستوي j+1 تعتمد على نقطة واحدة في المستوي[4] j وعلى النحو الآتي:

لإيجاد u_1^{j+1} عند النقطة x_1 نستخدم تقريبات الفروق التقدمية كما مبين في أدناه:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = -u_i^j\left[\frac{-3u_i^{j+1} + 4u_{i+1}^{j+1} - u_{i+2}^{j+1}}{2h}\right] - \left[\frac{2u_i^{j+1} - 5u_{i+1}^{j+1} + 4u_{i+2}^{j+1} - u_{i+3}^{j+1}}{h^2}\right] - \left[\frac{3u_i^{j+1} - 14u_{i+1}^{j+1} + 26u_{i+2}^{j+} - 24u_{i+3}^{j+1} + 11u_{i+4}^{j+1} - 2u_{i+5}^{j+1}}{h^4}\right]$$

بضرب المعادلة بـk ونقل عناصر المستوي (j+1) إلى الطرف الأيمن وعناصر المستوي (j) إلى الطرف الأيسر بفرض أن $r = \frac{k}{h^2}$ وتبسيط المعادلة نحصل على:

$$u_i^j = \left(1 - \frac{3hr}{2}u_i^j + 2r + \frac{3r}{h^2}\right)u_i^{j+1} + \left(-2rhu_i^j - 5r - \frac{14r}{h^2}\right)u_{i+1}^{j+1} + \left(-\frac{rh}{2}u_i^j + 4r + \frac{26r}{h^2}\right)u_{i+2}^{j+1} + \left(-r - \frac{24r}{h^2}\right)u_{i+3}^{j+1} + \frac{11r}{h^2}u_{i+4}^{j+1} - \frac{2r}{h^2}u_{i+5}^{j+1} \quad \dots (5)$$

أما بقية الحلول u_i^{j+1} عند النقاط x_i إذ إن $i = 2, \dots, n-2$ فيتم إيجادها من تقريبات الفروقات المركزية:

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{k}=-u_i^j\left[\frac{u_{i+1}^{j+1}-u_{i-1}^{j+1}}{2h}\right]-\left[\frac{u_{i+1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right]-\left[\frac{u_{i+2}^{j+1}-4u_{i+1}^{j+1}+6u_i^{j+1}-4u_{i-1}^{j+1}+u_{i+2}^{j+1}}{h^4}\right]$$

بعد التبسيط تصبح المعادلة أعلاه بالشكل الآتي:

$$u_i^j=\left(1-2r+\frac{6r}{h^2}\right)u_i^{j+1}+\left(\frac{rh}{2}u_i^j+r-\frac{4r}{h^2}\right)u_{i+1}^{j+1}+\left(-\frac{rh}{2}u_i^j+r-\frac{4r}{h^2}\right)u_{i-1}^{j+1}+\frac{r}{h^2}u_{i+2}^{j+1}+\frac{r}{h^2}u_{i-2}^{j+1} \quad \dots(6)$$

أما لإيجاد u_{n-1}^{j+1} نستخدم تقريبات الفروق التراجعية كما مبين في أدناه:

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{k}=-u_i^j\left[\frac{3u_i^{j+1}-4u_{i-1}^{j+1}+u_{i-2}^{j+1}}{2h}\right]-\left[\frac{2u_i^{j+1}-5u_{i-1}^{j+1}+4u_{i-2}^{j+1}-u_{i-3}^{j+1}}{h^2}\right]-\left[\frac{3u_i^{j+1}-14u_{i-1}^{j+1}+26u_{i-2}^{j+1}-24u_{i-3}^{j+1}+11u_{i-4}^{j+1}-2u_{i-5}^{j+1}}{h^4}\right]$$

وعلية نحصل على المعادلة

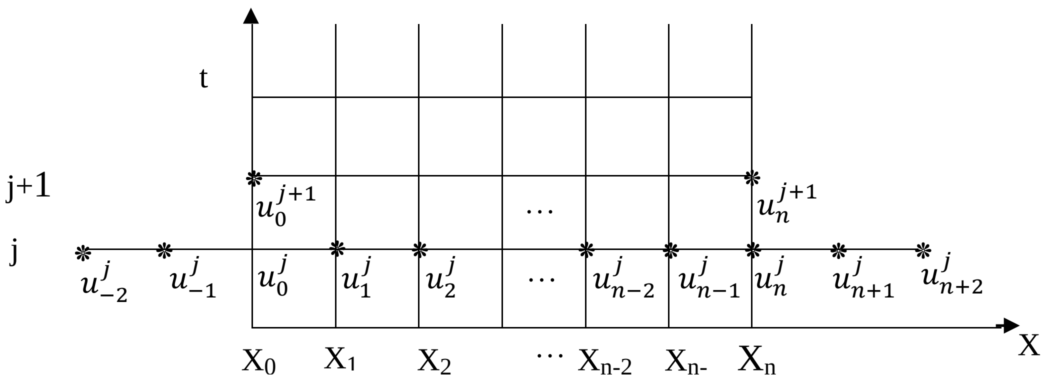
$$u_i^j=\left(1+\frac{3hr}{2}u_i^j+2r+\frac{3r}{h^2}\right)u_i^{j+1}+\left(-2rhu_i^j-5r-\frac{14r}{h^2}\right)u_{i-1}^{j+1}+\left(\frac{rh}{2}u_i^j+4r+\frac{26r}{h^2}\right)u_{i-2}^{j+1}+\left(-r-\frac{24r}{h^2}\right)u_{i-3}^{j+1}+\frac{11r}{h^2}u_{i-4}^{j+1}-\frac{2r}{h^2}u_{i-5}^{j+1} \quad \dots(7)$$

الشروط الحدودية Boundary conditions

ذكرنا الأنموذج الرياضي لمعادلة K.S. والشروط الحدودية للمعادلة والمتمثلة بالمعادلة $x=a\,,x=b$ ولتقريب الشروط الحدودية باستخدام الطريقة الصريحة نحتاج إلى تعريف النقاط $x_{-2},x_{-1},x_{n+1},x_{n+2}$ على النحو الآتي :

$$x_{-2}=x_0-2h$$
$$x_{-1}=x_0-h$$
$$x_{n+1}=x_n+h$$
$$x_{n+2}=x_n+2h$$

إذ إن هذه النقاط تقع خارج الشبكة وكما في الشكل (1)



الشكل (1)يوضح النقاط التي تقع خارج المشبك في المستوي j

الآن باستخدام الفروقات المركزية للشرط الحدودي الثاني من الرتبة الثانية

$$\frac{\partial^2 u(a,t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{16^2}$$
$$\frac{\partial^2 u(b,t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{16^2}$$

وباستخدام تقريبات الفروقات المركزية للمشتقة الثانية عندما $i = 0$

$$\frac{u_1^j - 2u_0^j + u_{-1}^j}{h^2} = -\frac{1}{16^2}$$
$$u_{-1}^j = -u_1^j + 2u_0^j - \frac{h^2}{16^2} \dots (8)$$

وعندما $i = n$

$$u_{n+1}^j = -u_{n-1}^j + 2u_n^j - \frac{h^2}{16^2} \dots (9)$$

وعند استخدام الفروقات المركزية للشرط الحدودي الثاني من الرتبة الرابعة عند $i = 0$ نحصل على

$$\frac{-u_2^j + 16u_1^j - 30u_0^j + 16u_{-1}^j - u_{-2}^j}{12h^2} = -\frac{1}{16^2}$$
$$u_{-2}^j = -u_2^j + 16u_1^j - 30u_0^j + 16u_{-1}^j + \frac{12h^2}{16^2} \dots (10)$$

وعندما $i = n$

$$u_{n+2}^j = -u_{n-2}^j + 16u_{n+1}^j - 30u_n^j + 16u_{n-1}^j + \frac{12h^2}{16^2} \dots (11)$$

نعوض المعادلة (10) في المعادلة (6) عندما $i = 0$ نحصل على المعادلة (12) بعد التبسيط

$$u_0^{j+1} = \left(1 + 2r + \frac{24r}{h^2}\right)u_0^j + \left(-\frac{rh}{2}u_0^j - r - \frac{12r}{h^2}\right)u_1^j + \left(\frac{rh}{2}u_0^j - r - \frac{12r}{h^2}\right)u_{-1}^j - \frac{12r}{16^2} \dots (12)$$

نلاحظ أن هناك نقطة أخرى تقع خارج المشبك نعوض المعادلة (8)في المعادلة (12) لنحصل على :

$$u_0^{j+1} = \left(1 + rhu_0^j - \frac{rh^3}{2(16^2)}\right)u_0^j - \left(rhu_0^j\right)u_1^j + \frac{rh^2}{16^2} \dots (13)$$

نعوض المعادلة (11) في المعادلة (6) عندما $i = n$ فنحصل على :

$$u_n^{j+1} = \left(1 + 2r + \frac{24r}{h^2}\right)u_n^j + \left(-\frac{rh}{2}u_n^j - r - \frac{12r}{h^2}\right)u_{n+1}^j + \left(\frac{rh}{2}u_n^j - r - \frac{12r}{h^2}\right)u_{n-1}^j - \frac{12r}{16^2} \dots (14)$$

نلاحظ أيضاً وجود نقطة واقعة خارج حدود المشبك, نعوض المعادلة (9) في المعادلة (14) لنحصل على :

$$u_n^{j+1} = \left(1 - rhu_n^j + \frac{rh^3}{2(16^2)}\right)u_n^j + \left(rhu_n^j\right)u_{n-1}^j + \frac{rh^2}{16^2} \dots (15)$$

وبعد إيجاد الحل عند الشروط الحدودية نحصل على النظام الخطي الخماسي الأقطار التالي:

$$\begin{bmatrix} A1 & B1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 & 0 & & 0 \dots & 0 \\ 0 & A2 & B2 & C1 & D1 & E1 & F1 & 0 \, .. & 0 \dots & 0 \\ & THAB & C & 0 & & \dots 0 & & & 0 \dots & 0 \\ & 0 & THABC & 0 & & & .. & & 0 \dots & 0 \\ & 0 & 0 & THA & BC & 0 & . & & 0 \dots & 0 \\ & & & & & . & & & & \\ & & & & & . & & & & \\ & & & & & . & & & & \\ & 0 \dots 0 & & 0..0 & & & & THABC & & \\ 0 \dots & 0 & & .. & 0 & F2 & E2 & D2 & T1\,H1 & A3 \; 0 \\ 0 \dots & 0 & & & & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & H2 \; A4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_0^{j+1} \\ u_1^{j+1} \\ u_2^{j+1} \\ . \\ . \\ . \\ u_{n-2}^{j+1} \\ u_{n-1}^{j+1} \\ u_n^{j+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{rh^3}{2(16^2)}\right) u_n^j + \frac{rh^2}{16^2} \\ u_1^j \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ u_{n-1}^j \\ \left(1 + \frac{rh^3}{2(16^2)}\right) u_n^j + \frac{rh^2}{16^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A1 & B1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 & 0 & & 0 \dots & 0 \\ 0 & A2 & B2 & C1 & D1 & E1 & F1 & 0 \, .. & 0 \dots & 0 \\ & THAB & C & 0 & & \dots 0 & & & 0 \dots & 0 \\ & 0 & THABC & 0 & & & .. & & 0 \dots & 0 \\ & 0 & 0 & THA & BC & 0 & . & & 0 \dots & 0 \\ & & & & & . & & & & \\ & & & & & . & & & & \\ & & & & & . & & & & \\ & 0 \dots 0 & & 0..0 & & & & THABC & & \\ 0 \dots & 0 & & .. & 0 & F2 & E2 & D2 & T1\,H1 & A3 \; 0 \\ 0 \dots & 0 & & & & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & H2 \; A4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_0^{j+1} \\ u_1^{j+1} \\ u_2^{j+1} \\ . \\ . \\ . \\ u_{n-2}^{j+1} \\ u_{n-1}^{j+1} \\ u_n^{j+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{rh^3}{2(16^2)}\right) u_n^j + \frac{rh^2}{16^2} \\ u_1^j \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ u_{n-1}^j \\ \left(1 + \frac{rh^3}{2(16^2)}\right) u_n^j + \frac{rh^2}{16^2} \end{bmatrix}$$

$$\forall\, j = 1,2,3, \dots, m$$

إذ إن

A=$\left(1-2r+\frac{6r}{h^2}\right)$,A1=$\left(1-rhu_n^j\right)$,A2=$\left(1-\frac{3hr}{2}u_i^j+2r+\frac{3r}{h^2}\right)$,
A3=$\left(1+\frac{3hr}{2}u_i^j+2r+\frac{3r}{h^2}\right)$, A4=$\left(1+rhu_n^j\right)$, B=$\left(\frac{rh}{2}u_i^j+r-\frac{4r}{h^2}\right)$, B1=$\left(rhu_n^j\right)$,
B2=$\left(-2rhu_i^j-5r-\frac{14r}{h^2}\right)$, C=$\frac{r}{h^2}$

وبترتيبالمعادلاتلنحصلعلىنظامسداسيالاقطار

C1=$\left(-\frac{rh}{2}u_i^j+4r+\frac{26r}{h^2}\right)$, D1=$\left(-r-\frac{24r}{h^2}\right)$, D2=$\left(-r-\frac{24r}{h^2}\right)$, E1=$\frac{11r}{h^2}$, E2=$\frac{11r}{h^2}$,
F1=$-\frac{2r}{h^2}$, F2=$-\frac{2r}{h^2}$, H=$\left(-\frac{rh}{2}u_i^j+r-\frac{4r}{h^2}\right)$, H1=$\left(-2rhu_i^j-5r-\frac{14r}{h^2}\right)$, H2=$\left(-rhu_n^j\right)$,
T= $\frac{r}{h^2}$, T1=$\left(\frac{rh}{2}u_i^j+4r+\frac{26r}{h^2}\right)$

النظام الخطي أعلاه يمكن إيجاد الحل له باستخدام الطرائق المباشرة (Direct Methods) أو الطرائق التكرارية (Iterative Methods) لقد استخدمت إحدى الطرائق المباشرة وهي طريقة حذف كاوس (Gaussian Elimination Method).

3-2 اشتقاق صيغة طريقة الفروقات المنتهية الأسية Exponential Finite DifferenceScheme لمعادلة .K.S:

قدم هذه الطريقة لأول مرة العالم Bhattacharya في عام 1985 للحالة غير المستقرة في البعد الواحد للتوصيل الحراري في الإحداثيات الديكارتية, بعد ذلك طورت خوارزمية الطريقة لحل معادلة الانتشار ذات البعد الواحد في الإحداثيات الأسطوانية وطبقت على مسائل ذات بعدين وثلاثة أبعاد. وتستعمل الطريقة لحل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية في بعد واحد وبعدين للإحداثيات الديكارتية[6] .

وطريقة اشتقاق صيغة الفروقات المنتهية الأسية تكون بفرض أن $F(u)$ ترمز لأي دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق [2], وبضرب المعادلة (1) بمشتقة F ينتج :

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}=F'(u)\left(-u\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^4 u}{\partial x^2}\right) \qquad \ldots(16)\ldots$$

وهذا يؤدي إلى

$$\frac{\partial F}{\partial t}=F'(u)\left(-u\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^4 u}{\partial x^2}\right) \qquad \ldots(17)\ldots$$

باستخدام الفروقات التقدمية الاعتيادية وتعويضها عن $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{t}}$ نحصل على :

$$\frac{F\left(u_i^{j+1}\right)-F\left(u_i^j\right)}{k}=F'\left(u_i^j\right)\left[-u_i^j\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^j-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^j-\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i^j\right] \qquad \ldots(18)$$

نفرض أن $F(u)=\ln u$ نحصل على صيغة الفروقات الأسية وعلى النحو الآتي:

$$u_i^{j+1}=u_i^j\, exp\left[\frac{k}{u_i^j}\left(-u_i^j\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^j-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^j-\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i^j\right)\right] \qquad \ldots(19)$$

لإيجاد الحل بهذه الطريقة نتبع الأسلوب المقترح وهو أن يحسب الحل u_1^{j+1} باستخدام المعدل الحسابي للمعادلات الفرقية التقدمية على النحو الآتي:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^j=\frac{-3u_i^j+4u_{i+1}^j-u_{i+2}^j}{2h}$$

$$(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_i^j = \frac{2u_i^j - 5u_{i+1}^j + 4u_{i+2}^j - u_{i+3}^j}{h^2}$$

$$(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4})_i^j = \frac{3u_i^j - 14u_{i+1}^j + 26u_{i+2}^j - 24u_{i+3}^j + 11u_{i+4}^j - 2u_{i+5}^j}{h^4}$$

وتعويضها في المعادلة(19) نحصل على

$$u_i^{j+1} = u_i^j \, exp\left[\frac{k}{u_i^j}\left(-u_i^j\left(\frac{-3u_i^j + 4u_{i+1}^j - u_{i+2}^j}{2h}\right) - \left(\frac{2u_i^j - 5u_{i+1}^j + 4u_{i+2}^j - u_{i+3}^j}{h^2}\right) - \left(\frac{3u_i^j - 14u_{i+1}^j + 26u_{i+2}^j - 24u_{i+3}^j + 11u_{i+4}^j - 2u_{i+5}^j}{h^4}\right)\right)\right] \quad \dots (20)$$

ولحساب الحلول التقريبية $u(x_i, t_j)$ إذ إن i=2,3,…,n−2 نعوض المعادلات الفرقية المركزية في المعادلة (19) نحصل على

$$u_i^{j+1} = u_i^j \, exp\left[\frac{k}{u_i^j}\left(-u_i^j\left(\frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h}\right) - \left(\frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}\right) - \left(\frac{u_{i+2}^j - 4u_{i+1}^j + 6u_i^j - 4u_{i-1}^j + u_{i-2}^j}{h^4}\right)\right)\right] \quad \dots (21)$$

أما عند الـ i=n−1 نعوض المعادلات الفرقية الخلفية في المعادلة(19) لنحصل على

$$u_i^{j+1} = u_i^j \, exp\left[\frac{k}{u_i^j}\left(-u_i^j\left(\frac{3u_i^j - 4u_{i-1}^j + u_{i-2}^j}{2h}\right) - \left(\frac{2u_i^j - 5u_{i-1}^j + 4u_{i-2}^j - u_{i-3}^j}{h^2}\right) - \left(\frac{3u_i^j - 14u_{i-1}^j + 26u_{i-2}^j - 24u_{i-3}^j + 11u_{i-4}^j - 2u_{i-5}^j}{h^4}\right)\right)\right] \quad \dots (22)$$

الشروط الحدودية *Boundary Conditions*

كما موضح في الطريقة الضمنية عند تقريب الشروط الحدودية للمعادلة سيتم الحصول على المعادلات نفسها للطريقة الأسية أي أنة سيتم تعويض المعادلة (10) في المعادلة (12) عندما i=0 نحصل على

$$u_0^{j+1} = u_0^j exp\left[\frac{k}{u_0^j}\left(-u_0^j\left[\frac{u_1^j - u_{-1}^j}{2h}\right] - \left[\frac{u_1^j - 2u_0^j + u_{-1}^j}{h^2}\right] - \left[\frac{12u_1^j - 24u_0^j + 12u_{-1}^j}{h^4}\right] - \frac{12}{16^2 h^2}\right)\right] \dots (23)$$

ونعوض المعادلة (8) في المعادلة (23) لنحصل على

$$u_0^{j+1} = u_0^j exp\left[\frac{k}{u_0^j}\left(\frac{u_0^j}{2h}\left(2u_1^j + 2u_0^j - \frac{h^2}{16^2}\right) - \frac{1}{16^2}\right)\right] \dots (24)$$

أما عند i=n نعوض المعادلة (11) في المعادلة (12) نحصل على

$$u_n^{j+1} = u_n^j exp\left[\frac{k}{u_n^j}\left(-u_n^j\left[\frac{u_{n+1}^j - u_{n-1}^j}{2h}\right] - \left[\frac{u_{n+1}^j - 2u_n^j + u_{n-1}^j}{h^2}\right] - \left[\frac{12u_{n+1}^j - 24u_n^j + 12u_{n-1}^j}{h^4}\right] - \frac{12}{16^2 h^2}\right)\right] \quad \dots (25)$$

ونعوض المعادلة (9) في المعادلة (25) لنحصل على

$$u_n^{j+1} = u_n^j exp\left[\frac{k}{u_n^j}\left(\frac{u_n^j}{2h}\left(2u_n^j - 2u_{n-1}^j - \frac{h^2}{16^2}\right) - \frac{1}{16^2}\right)\right] \quad \dots (26)$$

4- الاستقرارية العددية لمعادلة Kuramoto-Sivashinsky:

تُعد نظرية الاستقرارية العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية مع أكثر الشروط الحدودية عمومية في أغلب الأحيان صعبة جداً, كالازدواج بين تقطيع الشروط الحدودية وتقطيع المعادلات التفاضلية الجزئية أي يمكن أن تكون غير ملحوظة [9].

4-1 تحليل الاستقرارية العددية لطريقة الفروقات المنتهية الضمنية الكاملة:

باستخدام طريقة Fourier(Von-Neumann)نقوم بدراسة الاستقرارية العددية لطريقة الفروقات المنتهية الكاملة لمعادلة .K.S وان هذه الطريقة تتطلب تحويل المسالة إلى معادلة خطية لذالك نقوم بحذف الجزء غير الخطي من المعادلة وعلى النحو الآتي :

عند العقدة الثانية i=1 نستخدم المعادلة الفرقية الآتية :

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = -\left[\frac{2u_i^{j+1} - 5u_{i+1}^{j+1} + 4u_{i+2}^{j+1} - u_{i+3}^{j+1}}{h^2}\right] - \left[\frac{3u_i^{j+1} - 14u_{i+1}^{j+1} + 26u_{i+2}^{j+} - 24u_{i+3}^{j+1} + 11u_{i+4}^{j+1} - 2u_{i+5}^{j+1}}{h^4}\right] \quad \dots (27)$$

نعوض عن ^j_i بـ$\varphi(t)e^{m\beta x}$ في المعادلة (27) إذ أن$0 \neq \varphi(t)$,$\beta > 0$ و $m = \sqrt{-1}$ وبضرب طرفي المعادلة بـ$\frac{k}{e^{m\beta x}}$وفرض أن $r = \frac{k}{h^2}$ نحصل على

$$\frac{\varphi(t+k)}{\varphi(t)} = \frac{1}{\text{a}}$$

وأن

$$a = 1 + r\left[2 - 5e^{m\beta h} + 4e^{2m\beta h} - e^{3m\beta h}\right] + \frac{r}{h^2}\left[3 - 14e^{m\beta h} + 26e^{2m\beta h} - 24e^{3m\beta h} + 11e^{4m\beta h} - 2e^{5m\beta h}\right]$$

باستخدام مفكوك ذي الحدين للمقام وبالتبسيط نحصل على

$$\frac{\varphi(t+k)}{\varphi(t)} = \frac{1}{\text{a1}}$$

$$a1 = 1 + r\left[\left(1 - e^{m\beta h}\right)^3 + \left(1 - e^{m\beta h}\right)^2\right] + \frac{r}{h^2}\left[2\left(1 - e^{m\beta h}\right)^5 + \left(1 - e^{m\beta h}\right)^4\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(t+k)}{\varphi(t)} = \frac{1}{\mathrm{a2}} \qquad \ldots (28)$$

$$a2 = 1 + r\left(1-e^{m\beta h}\right)^3\left[1+\frac{2}{h^2}\left(1-e^{m\beta h}\right)^2\right] + r\left(1-e^{m\beta h}\right)^2\left[1+\frac{1}{h^2}\left(1-e^{m\beta h}\right)^2\right]$$

بتبسيط المعادلة (28) وإعادة كتابتها على النحو الآتي:

$$\frac{\varphi(t+k)}{\varphi(t)} = \frac{1}{\mathrm{A}+m\mathrm{B}} = \psi \qquad \ldots (29)$$

إذ إن ψ هو عامل التضخم وإن

$$A = 1 + r\left(8rsin^6\left(\frac{\beta h}{2}\right) - 6sin^2(\beta h)sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + \frac{64}{h^2}sin^{10}\left(\frac{\beta h}{2}\right) - \frac{160}{h^2}sin^2(\beta h)sin^6\left(\frac{\beta h}{2}\right) + \frac{20}{h^2}sin^4(\beta h)sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 4sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) - sin^2(\beta h) + \frac{16}{h^2}sin^8\left(\frac{\beta h}{2}\right) - \frac{24}{h^2}sin^2(\beta h)sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) + \frac{1}{h^2}sin^4(\beta h)\right)$$

$$B = rsin(\beta h)\left(-12sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) + sin^2(\beta h) - \frac{160}{h^2}sin^8\left(\frac{\beta h}{2}\right) + \frac{80}{h^2}sin^2(\beta h)sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) - \frac{2}{h^2}sin^4(\beta h) - 4sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) - \frac{32}{h^2}sin^6\left(\frac{\beta h}{2}\right) + \frac{8}{h^2}sin^2(\beta h)sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)$$

إن الشرط الضروري والكافي للاستقرارية العددية هو

$$\left|\frac{\varphi(t+k)}{\varphi(t)}\right| = |\psi| \le 1$$

لبعض قيم (βh) تكون $[8]sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) = 1$ نحصل على

$$A = 1 + r\left(5 - \frac{83}{h^2}\right)$$

$$B = rsin(\beta h)\left(-15 - \frac{106}{h^2}\right)$$

عليه فان المعادلة (29) تصبح على النحو الآتي:

$$|\psi| = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2r\left(5-\frac{83}{h^2}\right) + r^2\left(5-\frac{83}{h^2}\right)^2 + r^2\left(-15-\frac{106}{h^2}\right)^2}}$$

من الواضح أن $\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2} \ge 1$ عليه نحصل على تحقيق الشرط $|\psi| \le 1$

أما لدراسة استقرارية الحلول عند العقد $i = 2,3,\ldots,n-2$ فنستخدم المعادلة الفرقية الآتية :

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{k} = -\left[\frac{u_{i+1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right] - \left[\frac{u_{i+2}^{j+1}-4u_{i+1}^{j+1}+6u_i^{j+1}-4u_{i-1}^{j+1}+u_{i+2}^{j+1}}{h^4}\right]$$

نعوض عن $^{j}_{i}$ بـ $\varphi(t)e^{m\beta x}$ في المعادلة أعلاه وفرض أن $r = \frac{k}{h^2}$ نحصل على

$$\frac{\varphi(t+k)}{\varphi(t)} = \frac{1}{\mathrm{a}}$$

$$\mathrm{a} = 1 + r\left[e^{m\beta h} - 2 + e^{-m\beta h}\right] + \frac{r}{h^2}\left[e^{2m\beta h} - 4e^{m\beta h} + 6 - 4e^{-m\beta h} + e^{-2m\beta h}\right]$$

$$\frac{\varphi(t+k)}{\varphi(t)} = \frac{1}{\mathrm{a1}} = \frac{1}{\mathrm{A}} = \psi \qquad \dots(30)$$

$$\mathrm{a1} = 1 + 4rsin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) - \frac{8r}{h^2}sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) + \frac{2r}{h^2}sin^2(\beta h) - \frac{8r}{h^2}sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)$$

لبعض قيم (βh) تكون $sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) = 1$ نحصل على

$$|\psi| = \frac{1}{\sqrt{A^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{r}\left(-8 + \frac{28}{h^2}\right) + r^2\left(4 - \frac{14}{h^2}\right)^2}}$$

من الواضح أن $\sqrt{1 + \mathrm{r}\left(-8 + \frac{28}{h^2}\right) + r^2\left(4 - \frac{14}{h^2}\right)^2} \geq 1$ علية فإن الشرط$|\psi| \leq 1$ يتحقق.

أما النقطة$i=n-1$ فنستخدم المعادلة الفرقية الآتية :

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = -\left[\frac{2u_i^{j+1} - 5u_{i-1}^{j+1} + 4u_{i-2}^{j+1} - u_{i-3}^{j+1}}{h^2}\right] - \left[\frac{3u_i^{j+1} - 14u_{i-1}^{j+1} + 26u_{i-2}^{j+1} - 24u_{i-3}^{j+1} + 11u_{i-4}^{j+1} - 2u_{i-5}^{j+1}}{h^4}\right] \qquad \dots(31)$$

نعوض عن u_i^j بـ$\varphi(t)e^{m\beta x}$ في المعادلة (31) وفرض أن $r = \frac{k}{h^2}$ نحصل على:

$$\frac{\varphi(t+k)}{\varphi(t)} = \frac{1}{\mathrm{a}}$$

وإن

$$a = 1 + r\left[2 - 5e^{-m\beta h} + 4e^{-2m\beta h} - e^{-3m\beta h}\right] + \frac{r}{h^2}\left[3 - 14e^{-m\beta h} + 26e^{-2m\beta h} - 24e^{-3m\beta h} + 11e^{-4m\beta h} - 2e^{-5m\beta h}\right]$$

باستخدام مفكوك ذي الحدين للمقام وبالتبسيط نحصل على

$$\frac{\varphi(t+k)}{\varphi(t)} = \frac{1}{\mathrm{a1}}$$

$$a1 = 1 + r\left[\left(1 - e^{-m\beta h}\right)^3 + \left(1 - e^{-m\beta h}\right)^2\right] + \frac{r}{h^2}\left[2\left(1 - e^{-m\beta h}\right)^5 + \left(1 - e^{-m\beta h}\right)^4\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(t+k)}{\varphi(t)} = \frac{1}{\mathrm{a2}} \qquad \dots(32)$$

$$a2 = 1 + r\left(1 - e^{-m\beta h}\right)^3\left[1 + \frac{2}{h^2}\left(1 - e^{-m\beta h}\right)^2\right] + r\left(1 - e^{-m\beta h}\right)^2\left[1 + \frac{1}{h^2}\left(1 - e^{-m\beta h}\right)^2\right]$$

بتبسيط المعادلة (32) وإعادة كتابتها على النحو الآتي:

$$\frac{\varphi(t+k)}{\varphi(t)} = \frac{1}{\mathrm{A + mB}} = \psi \qquad \dots(33)$$

إذ إن ψ هو عامل التضخم وإن

$$A = 1 + r\left(8rsin^6\left(\frac{\beta h}{2}\right) - 6sin^2(\beta h)sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + \frac{64}{h^2}sin^{10}\left(\frac{\beta h}{2}\right) - \frac{160}{h^2}sin^2(\beta h)sin^6\left(\frac{\beta h}{2}\right) + \frac{20}{h^2}sin^4(\beta h)sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 4sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) - sin^2(\beta h) + \frac{16}{h^2}sin^8\left(\frac{\beta h}{2}\right) - \frac{24}{h^2}sin^2(\beta h)sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) + \frac{1}{h^2}sin^4(\beta h)\right)$$

$$B = rsin(\beta h)\left(12sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) - sin^2(\beta h) + \frac{160}{h^2}sin^8\left(\frac{\beta h}{2}\right) - \frac{80}{h^2}sin^2(\beta h)sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) + \frac{2}{h^2}sin^4(\beta h) + 4sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + \frac{32}{h^2}sin^6\left(\frac{\beta h}{2}\right) - \frac{8}{h^2}sin^2(\beta h)sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)$$

لبعض قيم (βh) تكون $sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) = 1$ نحصل على

$$A = 1 + r\left(5 - \frac{83}{h^2}\right)$$

$$B = rsin(\beta h)\left(15 + \frac{106}{h^2}\right)$$

باستخدام الشرط الضروري والكافي للاستقرارية العددية في المعادلة (33)

$$|\psi| = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2r\left(5 - \frac{83}{h^2}\right) + r^2\left(5 - \frac{83}{h^2}\right)^2 + r^2\left(15 + \frac{106}{h^2}\right)^2}}$$

من الواضح أن $\sqrt{A^2 + B^2} \geq 1$ عليه نحصل على تحقيق الشرط $|\psi| \leq 1$

عليه فإن الطريقة الضمنية الكاملة (Fully-Implicit Method) تكون مستقرة بدون شرط (unconditionally stable) عند جميع نقاط المشبك.

2−4 تحليل الاستقرارية العددية لطريقة الفروقات المنتهية الأسية باستخدام طريقة *Fourier (Von-Neumann)* :

لدراسة الاستقرارية العددية لطريقة الفروقات الأسية نقوم بحذف الجزء غير الخطي من المعادلة (19) .

المعادلة مع الجزء غير الخطي هي :

$$u_i^{j+1} = u_i^j \exp\left[\frac{k}{u_i^j}\left(-u_i^j\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^j - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^j - \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i^j\right)\right] \quad ...(34)$$

بحذف الجزء غير الخطي من المعادلة (34) يكون لدينا :

$$u_i^{j+1} = u_i^j \exp\left[\frac{k}{u_i^j}\left(-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^j - \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i^j\right)\right] \quad ...(35)$$

ولدراسة الاستقرارية العددية نبدأ بالعقدة الثانية عندما i=1 نستخدم المعادلة الفرقية الآتية:

$$u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j+1}}$$
$$= u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}} \exp\left[\frac{\mathrm{k}}{u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}}}\left(-\left(\frac{2u_i^j - 5u_{i+1}^j + 4u_{i+2}^j - u_{i+3}^j}{\mathrm{h}^2}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(\frac{3\mathrm{u}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}} - 14\mathrm{u}_{\mathrm{i+1}}^{\mathrm{j}} + 26\mathrm{u}_{\mathrm{i+2}}^{\mathrm{j}} - 24\mathrm{u}_{\mathrm{i+3}}^{\mathrm{j}} + 11\mathrm{u}_{\mathrm{i+4}}^{\mathrm{j}} - 2\mathrm{u}_{\mathrm{i+5}}^{\mathrm{j}}}{\mathrm{h}^4}\right)\right)\right] \qquad \ldots (36)$$

نعوض عن $_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}}$ بـ$\varphi(t)e^{m\beta x}$ في المعادلة (36) وبعد التبسيط نحصل على

$$\frac{\varphi(t+k)}{\varphi(t)} = \exp\left\{r\left(1-e^{m\beta h}\right)^3\left[-1-\frac{2}{h^2}\left(1-e^{m\beta h}\right)^2\right]\right.$$
$$\left.+\, r\left(1-e^{m\beta h}\right)^2\left[-1-\frac{1}{h^2}\left(1-e^{m\beta h}\right)^2\right]\right\}$$

وبتبسيط المعادلة أعلاه وبالأسلوب المتبع نفسه في الطرائق الأخرى نحصل على :

$$\frac{\varphi(t+k)}{\varphi(t)} = \exp\{\mathrm{A} + \mathrm{mB}\} = \psi \qquad \ldots (37)$$

إذ إن

$$A = r\left(-5 + \frac{83}{h^2}\right)$$
$$B = r\sin(\beta h)\left(15 + \frac{106}{h^2}\right)$$
$$|\psi| = |exp\{A + iB\}| = e^A \le 1$$

عليه تكون $|\psi| \le 1$ فقط إذا كانت $A \le 0$ أي

$$r\left(-5 + \frac{83}{h^2}\right) \le 0$$

بما أن $r > 0$ دائماً صحيحة عليه

$$-5 + \frac{83}{h^2} \le 0 \quad \Rightarrow \frac{83}{h^2} \le 5 \Rightarrow h > \sqrt{\frac{83}{5}}$$

أما لدراسة الاستقرارية عند النقاط i=2,..,n−2 فنستخدم المعادلة الفرقية الآتية :

$$u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j+1}} = u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}} \exp\left[\frac{\mathrm{k}}{u_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}}}\left(-\left(\frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\mathrm{h}^2}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(\frac{\mathrm{u}_{\mathrm{i+2}}^{\mathrm{j}} - 4\mathrm{u}_{\mathrm{i+1}}^{\mathrm{j}} + 6\mathrm{u}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}} - 4\mathrm{u}_{\mathrm{i-1}}^{\mathrm{j}} + \mathrm{u}_{\mathrm{i-2}}^{\mathrm{j}}}{\mathrm{h}^4}\right)\right)\right] \qquad \ldots (38)$$

نعوض عن $_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}}$ بـ$\varphi(t)e^{m\beta x}$ في المعادلة (38) بعد التبسيط نحصل على :

$$\frac{\varphi(t+k)}{\varphi(t)} = \exp\left\{-r\left[e^{m\beta h} - 2 + e^{-m\beta h}\right]\right.$$
$$\left.-\frac{r}{h^2}\left[e^{2m\beta h} - 4e^{m\beta h} + 6 - 4e^{-m\beta h} + e^{-2m\beta h}\right]\right\}$$

بالتبسيط نحصل على

$$\frac{\varphi(t+k)}{\varphi(t)} = \exp\left\{4rsin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) - \frac{8r}{h^2}sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) + \frac{2r}{h^2}sin^2(\beta h) - \frac{8r}{h^2}sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right\} = e^A$$
$$= \psi \qquad \ldots (39)$$

إذ إن

$$A = 4rsin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) - \frac{8r}{h^2}sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) + \frac{2r}{h^2}sin^2(\beta h) - \frac{8r}{h^2}sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)$$

ينتج

$$|\psi| = |e^A|$$

لكي يتحقق الشرط يجب أن تكون $A \le 0$ أي أن

$$A = \mathrm{r}\left(4 - \frac{14}{h^2}\right)$$
$$r\left(4 - \frac{14}{h^2}\right) \le 0$$

بما أن $r > 0$ دائماً صحيحة عليه

$$4 - \frac{14}{h^2} \le 0 \quad \Rightarrow \frac{14}{h^2} \le 4$$
$$\Rightarrow \frac{1}{h^2} \le \frac{4}{14} \Rightarrow h \ge \sqrt{\frac{14}{4}}$$

أما للعقدة i=n−1 فنستخدم المعادلة الفرقية الآتية :

$$u_i^{j+1} = u_i^j\, exp\left[\frac{k}{u_i^j}\left(-\left(\frac{2u_i^j - 5u_{i-1}^j + 4u_{i-2}^j - u_{i-3}^j}{h^2}\right) - \left(\frac{3u_i^j - 14u_{i-1}^j + 26u_{i-2}^j - 24u_{i-3}^j + 11u_{i-4}^j - 2u_{i-5}^j}{h^4}\right)\right)\right] \qquad \ldots (40)$$

نعوض عن u_i^j بـ$\varphi(t)e^{m\beta x}$ في المعادلة (40) وتبسيط المعادلة نحصل على :

$$\frac{\varphi(t+k)}{\varphi(t)} = \exp\Big\{-r\left[2 - 5e^{-m\beta h} + 4e^{-2m\beta h} - e^{-3m\beta h}\right] - \frac{r}{h^2}\left[3 - 14e^{-m\beta h} + 26e^{-2m\beta h} - 24e^{-3m\beta h} + 11e^{-4m\beta h} - 2e^{-5m\beta h}\right]\Big\}$$

باستخدام مفكوك ذي الحدين نحصل على

$$\frac{\varphi(t+k)}{\varphi(t)} = \exp\left\{r\left(1 - e^{-m\beta h}\right)^3\left[-1 - \frac{2}{h^2}\left(1 - e^{-m\beta h}\right)^2\right] + r\left(1 - e^{-m\beta h}\right)^2\left[-1 - \frac{1}{h^2}\left(1 - e^{-m\beta h}\right)^2\right]\right\}$$

وبتبسيط المعادلة أعلاه بالأسلوب المتبع نفسه في الطرائق الأخرى نحصل على

$$\frac{\varphi(t+k)}{\varphi(t)} = \exp\{\mathrm{A} + \mathrm{mB}\} = \psi \qquad \ldots (41)$$

إذ إن

$$A = r\left(-5 + \frac{83}{h^2}\right)$$
$$B = r\sin(\beta h)\left(-15 - \frac{106}{h^2}\right)$$

من المعادلة (41) نجد أن

$$|\psi| = |\exp\{A + mB\}| = e^A \leq 1$$

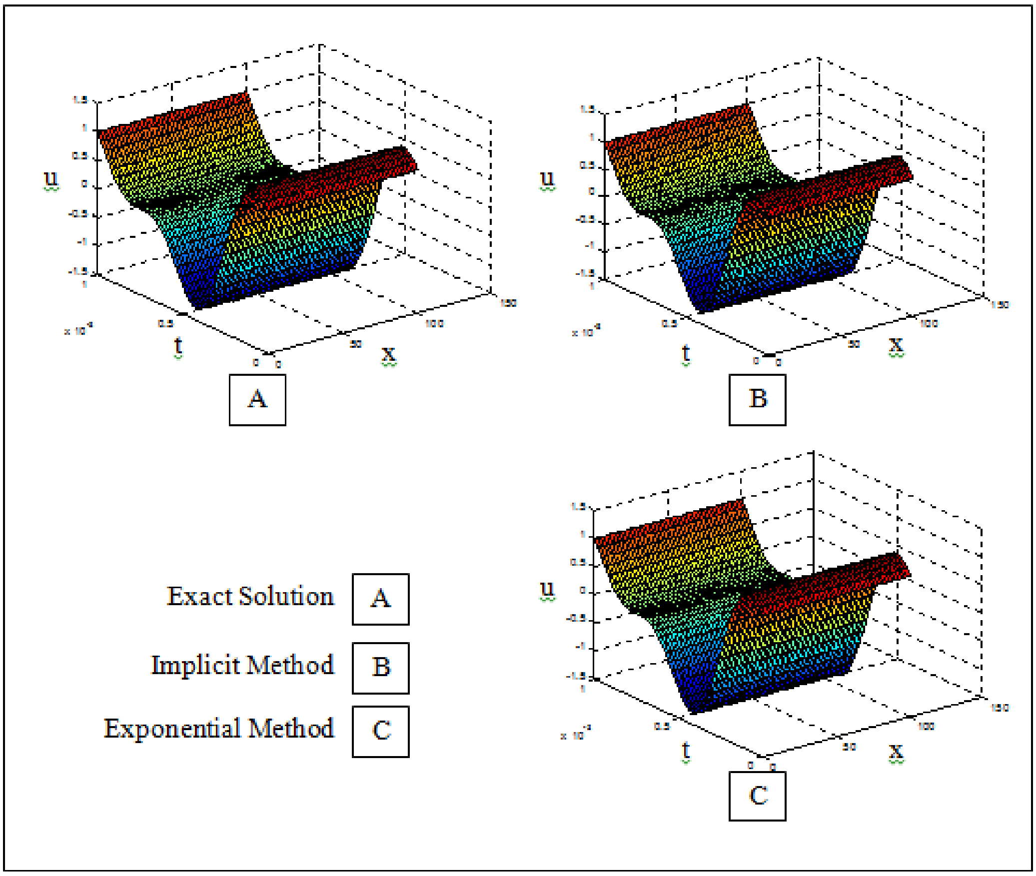
بما أن $r > 0$ دائماً صحيحة عليه

$$-5 + \frac{83}{h^2} \leq 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{h^2} \leq \frac{5}{83} \Rightarrow h \geq \sqrt{\frac{83}{5}}$$

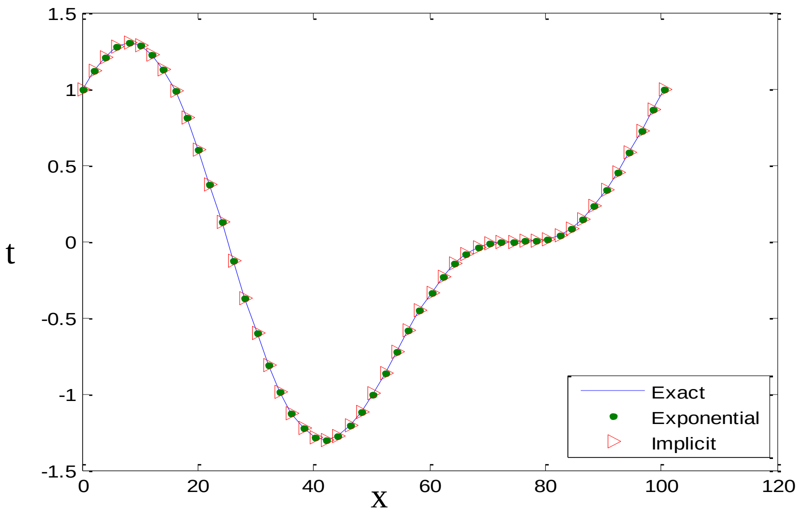
نلاحظ أن طريقة الفروقات الأسية Exponential Finite difference لحل معادلة K.S. للخطوة الزمنية k تكون غير مشروطة (unconditionally stable) لكل النقاط.

5- النتائج العددية Numerical Results

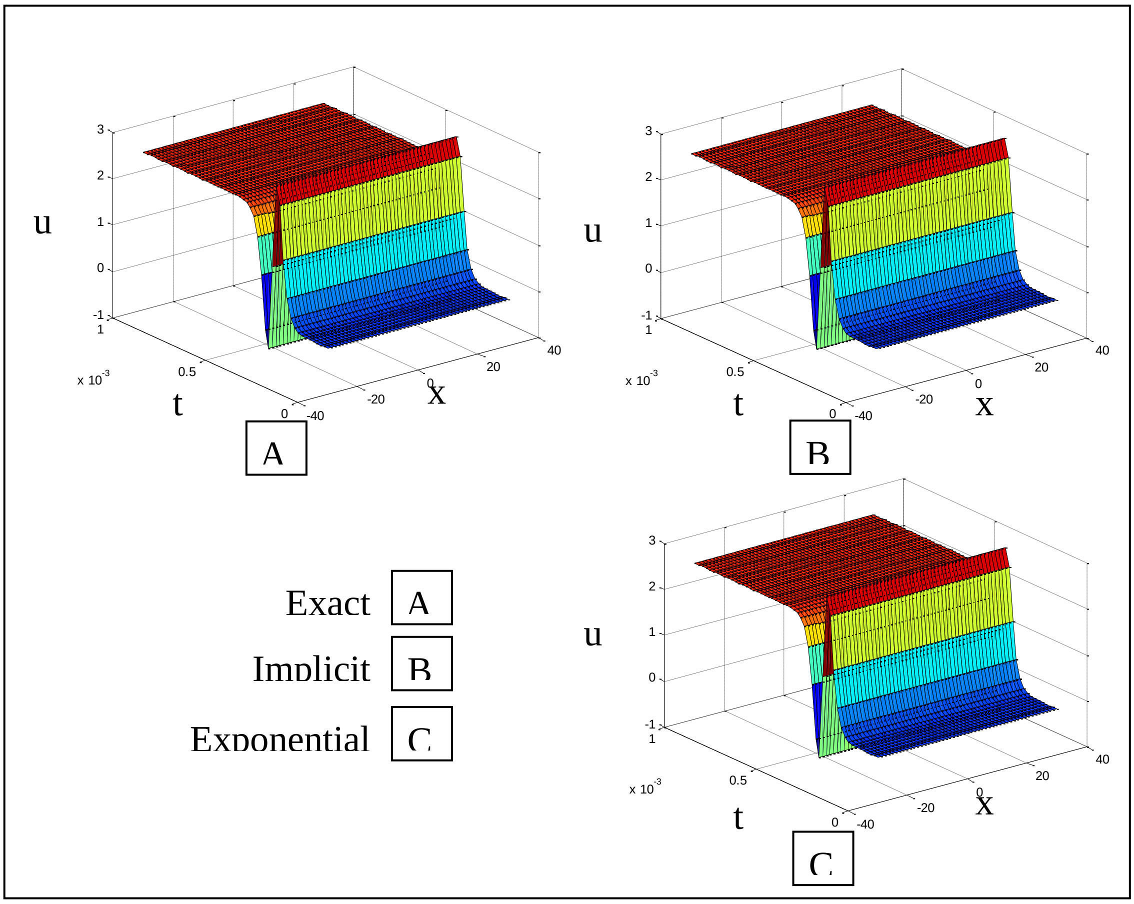
سنناقش في هذه الفقرة النتائج العددية لطرائق الفروقات المنتهية المتمثلة بالطرائق الآتية الطريقة الضمنية الكاملة (Fully Implicit Scheme) وطريقة الفروقات الآسية (Exponential Scheme), وقد نوقش حل المعادلة (1) والشروط الحدودية (2) مع أخذ الفترة [0,32π] مع الشرط الابتدائي في معادلة (3), والفترة [-30,30] مع الشرط الابتدائي في معادلة (4) :



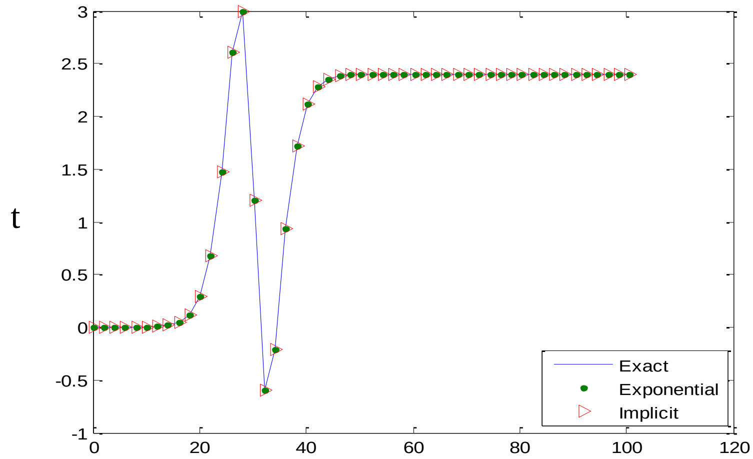
الشكل (2): يوضح الحلول العددية للطريقتين المستخدمة والحل المضبوط للفترة [0,32π] والشرط الابتدائي في معادلة (3)



الشكل (3): يوضح مقارنة الحل العددي بين الطريقتين المستخدمة مع الحل المضبوط للفترة [0,32π] والشرط الابتدائي في معادلة (3)



الشكل(4): يوضح الحلول العددية للطريقتين المستخدمة والحل المضبوط للفترة [-30,30] والشرط الابتدائي في معادلة (4)



الشكل (5): يوضح مقارنة الحل العددي بين الطريقتين المستخدمة مع الحل المضبوط للفترة[30,30-] والشرط الابتدائي في معادلة (4)

6- الاستنتاجات

من خلال دراستنا لمعادلة K.S. لاحظنا أنها من المعادلات الحرارية المهمة في التطبيقات الهندسية والفيزيائية, وقد استخدمها العلماء بكثرة في الآونة الأخيرة, وتعد من المعادلات غير الخطية التي تحتاج إلى جهد كبير لغرض إيجاد الحل العددي لها وتحتاج دقة كبيرة في معالجة المشتقة الرابعة, وقد توصلنا إلى أهم الاستنتاجات التي هي:

إن الطريقة الضمنية الكاملة (Fully-Implicit Method) تكون مستقرة بدون شرط (unconditionally stable) عند جميع نقاط المشبك.

أن طريقة الفروقات الأسية Exponential Finite difference لحل معادلة K.S. للخطوة الزمنية k تكون غير مشروطة (unconditionally stable) لكل النقاط.

المصادر

[1] Al-Rawi, Ekhlass S. and Al-Baker, Al-Moutasam A., (2011), "Finite Difference Method to Solve Korteweg-de Vries-Burger Equation", Al-Rafiden J. of Com. Sci. and Math., Vol.8, No.1, PP.65-80.

[2] Bahadir, A. Refik, (2005), "Exponential Finite-Difference Method Applied to Korteweg-de Vries Equation for Small Times", Applied Mathematics and Computation, Vol. 160, PP. 675-682.

[3] Dubljevic S., (2010), "Boundary Model Predictive Control of Kuramoto–SivashinskyEquation with Input and State Constraints", Computers and Chemical Engineering, Vol.34, PP.1655-1661.

[4] Duffy, Daniel J. (2006), "Finite Difference Methods in Financial Engineering A Partial Differential Equation Approach", England,the Atrium, Southern Gate, Chi-Chester, West Sussex PO19 8SQ, John Wiley &Sons Ltd.

[5] Hag F. I., (2009), "Numerical Solution of Boundary-Value and Initial-Boundary-Value Problems using Spline Fuctions", Topi, University of Pakistan, Master Thesis.

[6] Handschuh F. R. and Keith G. T., (1988), "Applications of an Exponential Finite Difference Technique", NASA, Technical Memorandum 100939, AVSCOM, Technical Memorandum 88-C-004.

[7] Kudryashov N. A., (2004), "Simplest Equation Method to look for Exact Solutions of Nonlinear Differential Equations",Departmentof Applied MathematicsMoscowEngineering and Physics Institute.http://arXiv.org/abs/nlin/0406007v1

[8] Lapidus, Leon and George, F.P., (1982), "Numerical Solution of Parital Differential Equation in Science and Engineering", John Wiley and Sons, Inc.

[9] Leveque J. R., (2007), "Finite Difference Method for Ordinary and Partial Differential Equations" Society for industrial and Applied Mathematics.

[10] Halifax, Nova Scotia, (2009), "High Order Collocation Software forthe Numerical Solution of Fourth Order Parabolic PDEs", Ling Lin, University of Saint Mary's, Master Thesis.

[11] MacKenzie T. and Roberts A. J., (2008), "Holistic Finite Differences Accurately Model the Dynamics of the Kuramoto-Sivashinsky Equation", Dept Maths & Comp, University of Southern Qld.http://arXiv.org/abs/math/0001079v2.

[12] Sastry S. S., (2010), "Introductory Methods of Numerical Analysis", Fourth Edition, PHI Learning Private Limited, New Delhi.

[13] Steven T. Karris, (2007), "Numerical Analysis Using Matlab and Excel", Third

Edition, Orchard Publications.

[14] Ulf R. K. and Erlend M. V.,(2010), "Computational Methods in Acovstic", Department of Electronics and Telecommunications-NANU.

[15] Wazwaz, A. M., (209), "Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory", Higher Eduction Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg.