معولية مقدرات بيز للعينات الجزئية للعائلة الآسية المختلطة

The Reliability of Bayes Estimators for the Partial Mixture samples of the Exponential Family

د.سعاد خلف سلمان
جامعة كربلاء / كلية التربية / قسم الرياضيات

الخلاصة :

يهدف البحث إلى إيجاد صيغة لتقدير معولية التوزيعات الاسية المختلطة لمجتمعين جزئيين, وتم استخدام طريقة التقدير البيزي لأوقات الفشل في حالتين من المجتمعات الجزئية, الحالة التي يمكن تحديد انتماء المفردة إلى أي مجتمع جزئي $J=1,2,...,k,sp_j$ والحالة الأخرى لا يمكن تحديد انتماء المفردة.

Abstract :

The object of this paper is find formula to estimate the reliability of mixture exponential distributions, for two sub populations. It is used Bayesian estimate method for failure times, in two cases of sub population. In one case it is possible to assign each unit to the appropriate sub population; while in the other case information is not available.

1-المقدمة

تعد التوزيعات الاسية من التوزيعات المهمة في اختبارات الحياة ة ودراسة أوقات الفشل في المجالات الهندسية والفيزياوية وغير ذلك. وفي كثير من الأحيان يكون المجتمع تحت الدراسة غير متجانس, أي يحتوي على مجموعة من المجتمعات الجزئية وهي $SP_1, SP_2, ..., SP_k$ مخلوطة بنسب هي $P_1, P_2, ... P_k$ على التوالي. $\theta'\theta$ وهناك نوعان من الاختلاط [9] .

الحالة الأولى:

في هذه الحالة يمكن تحديد انتماء كل وحدة من وحدات العينة إلى أي مجتمع جزئي SP_j, وتكون دالة الامكان للمتغير العشوائي T في هذه الحالة بالصيغة

$$L(t_1,t_2,....t_n \setminus \underline{\theta}, \underline{P}) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! ... n_k!} P_1^{n_1}, \; P_2^{n_2} ....P_k^{n_k} \prod_{j=1}^{k} \{ \prod_{i=1}^{n_j} f(t_{ji}, \theta_j) \} \quad ......(1)$$

Where

$$\theta' = [\theta_1 \theta_2 ... \theta_k]$$

$$p_1 + p_2 + ... + p_k = 1 \,\&\, n_1 + n_2 + ... + n_k = n$$

الحالة الثانية:

هنا لا يمكن تحديد انتماء المفردة إلى أي مجتمع جزئي لذا فان دالة الإمكان للمتغير العشوائي T تكون بالصيغة:

$$L(t_1, t_2, ..., t_n \setminus \underline{\theta}, p) = \prod_{i=1}^{n} g(t_i, \theta, p) = \prod_{i=1}^{n} \{ \sum_{j=1}^{k} P_j \, f(t_i \mid \theta_j) \} \quad .... \quad (2)$$

وعندما يتبع المتغير العشوائي T توزيعا أسيا بمعلمة قياس θ فان دالة الكثافة الاحتمالية تكون بالصيغة:-

$$f(t/\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} e^{-t/\theta} & t \geq 0, \theta > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad ......(3)$$

ويكون التوزيع الآسي هنا توزيعا مختلطا وان K=1 وكأن المجتمع مختلط مع نفسه. أما إذا كان المجتمع يحتوي على مجتمعين جزئيين أي إن K=2 فان دالة الإمكان في الحالة الأولى هي:

$$L(t_{11},t_{12},...,t_{1n_1},t_{21},t_{22},...,t_{2n_2}\mid\theta_1,\theta_2,p)=\frac{n!}{n_1!.n_2!}\frac{p^{n_1}}{\theta_1^{n_1}}.\frac{(1-p)^{n_2}}{\theta_2^{n_2}}.\exp\left\{\frac{-\sum_{i=1}^{n_1}t_{1i}}{\theta_1}-\frac{\sum_{i=1}^{n_2}t_{2i}}{\theta_2}\right\}...(4)$$

أما للحالة الثانية فتكون دالة الامكان

$$L(t,\theta_1,\theta_2,p)=\prod_{i=1}^{n}\left\{p\frac{1}{\theta_1}e^{-t_i/\theta_1}+(1-p)\frac{1}{\theta_2}e^{-t_i/\theta_2}\right\}........(5)$$

2- العرض المرجعي

هناك الكثير من الباحثيين ممن اهتم بمجال دراسة التوزيعات المختلطة وطرائق تقدير المعالم.

ففي عام (1961) قدم الباحث .Rider,P.R[8] بحثا تضمن استخدام طريقة العزوم لتوزيعيين اسية مختلطة.وفي عام (1972)قدم الباحثان (.Pure ,P.S. and Rubin ,H)[7] بحثا حول خصائص عائلة من التوزيعات بمعدلات فشل متعددة المتغيرات .كذلك قام الباحث (Sinha and Kale)[9] عام (1980)بدراسة بعض نماذج الفشل الاسي ،كاما ،ويبل ،الطبيعي،اللوغارتم الطبيعي ، وقد قاما بدراسة التوزيعات المختلطة والمركبة ومنها التوزيع الاسي المختلط وتوزيع ويبل المختلط وتقديرات الامكان الاعظم للمعلمات .

وفي عام (1992)قام الباحث (Hadi)[5]بدراسة التوزيعات المختلطة بشكل عام مع اعطاء بعض الامثلة للتوزيع الطبيعي المختلط ودراسة العزوم للتوزيعات المختلطة.

وفي عام (2001) قدم الباحث (Ghosha,Ebrahimi)[4] بدراسة التحليلات البيزية لدالة معدل نسبة الفشل للتوزيع الاسي المختلط. وقام الباحث (شاهر)[2] عام (2005)بتسليط الضوء على احد اهم وابرز المواضيع المعاصرة في دراسة المعولية وهو الانظمة القابلة للاصلاح والذي يحضى بتطبيقات واسعة وخاصة فيما يتعلق بانظمة مراقبة محركات السيارات والطائرات وانظمة الاتصالات والمكائن والتي لا تحتمل التوقف لانه توقفها يسبب خسائر مادية وبشرية جسيمة .وقد ركزت الدراسة في جانبها الاكبر على عمليات بواسون لتقدير عدد مرات الفشل وقد اقترح الباحث نموذج بواسون المختلط (Mixture of Poisson) وقدرت معلمات هذا النموذج. كذلك قامت الباحثة (السلطاني) [1] في العام نفسه بدراسة التوزيعات المحتلطة من خلال ميزاتها ،وكذلك تقدير معلمات هذه التوزيعات .وقد ركزت الدراسة على دراسة ميزات التوزيعات الاسية المختلطة ،وتم استخدام طريقتي العزوم والامكان الاعظم لتقدير معلمات هذه التوزيعات.

3- مفهوم المعولية[3]

التعريف الأكثر شمولية لمفهوم المعولية هو:((احتمال الإنجاز لأي جزء من النظام خلال مدة زمنية, وتحت ظروف عمل خاصة)). أما التعريف الرياضي للمعولية فهو:

المعولية: هي احتمالية بقاء النظام في العمل أو عدم فشله في أداء عمله خلال الفترة الزمنية [o,t].

فإذا كانت الدالة R(t) ترمز لمعولية النظام عند الزمن t فان

$$R(t) = P_r\,(T > t)\ ......(6)$$

حيث T متغير عشوائي يمثل الوقت حتى حدوث الفشل (وقت الحياة) ومن صفات هذه الدالة:

$$1.\ \lim_{t\to 0} R(t)=1 \qquad 2.\ \lim_{t\to\infty} R(t)=0 \qquad ......(7)$$

وتكون دالة المعولية R(t) دالة غير متزايدة Non increasing على الفترة (∞ ,o]

4- مقدرات بيز لأوقات الفشل[10]

إن فكرة بيز تستلزم معرفة التوزيع الاولي للمعلمة المراد تقديرها باعتبارها متغير عشوائي. كذلك بيانات العينة للوصول إلى التوزيع اللاحق بما يقلل من توقع دالة الخسارة.

فإذا فرضنا إن:

$f(t\setminus\theta)$: دالة كثافة الاحتمال الشرطية للمتغير t عند قيمة θ.

$g(\theta)$: دالة التوزيع الأولي Proior P.d.f

$f(t,\theta)=f(t,\theta)g(\theta)$: دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين θ , t .

فان دالة التوزيع اللاحق Posterior P.d.f للعينة العشوائية $t_1, t_2,\ldots t_n$ تكون بالصيغة:

$$h(\theta \backslash t_1,t_2,...,t_n)=\frac{\prod_{i=1}^{n} f(t_i \backslash \theta)g(\theta)}{\int_{\Omega}\prod_{i=1}^{n} f(t_i \backslash \theta)g(\theta)d\theta}....(8)$$

وباستخدام قواعد جفري (Jeffry), لغرض افتراض صيغة دالة التوزيع الأولى, فان دالة الكثافة الاحتمالية الأولية تؤخذ كتوزيع لوغاريتمي منتظم, أي إن:

$$g(\theta)\alpha \frac{1}{\theta^c} \qquad \theta>0,\ c=1,2,3,....$$

K: ثابت التناسب

$$g(\theta)=\frac{k}{\theta^c} \qquad ......(9)$$

وفي حالة استخدام دالة الخسارة التربيعية, التي تعد اكثر الأنواع شيوعا واستخداما من دوال الخسارة الأخرى[6] , فان مقدر بيز لدالة المعولية $R(t \backslash \theta)$ يكون بالصيغة:

$$\hat{R}_{Bayes}(t \backslash \theta)=E\{R(t \backslash \theta)/t_1,t_2,...,t_n\}$$
$$=\int_{\Omega} R(t \backslash \theta)h(\theta \backslash t_1,t_2,....,t_n)d\theta$$

5- مقدر بيز لمعوليه التوزيعات الآسية المختلطة

في هذه الفقرة تم إيجاد صيغة لمقدر بيز لدالة المعولية للتوزيعات الآسية المختلطة في حالة وجود مجتمعين جزئية أي إن K=2 وللحالتين التي ذكرت في الفقرة الأولى من البحث.

5-1 الحالة الأولى: عندما يمكن تحديد انتماء المفردة إلى أي مجتمع جزئي باستخدام المعادلة (4) لإيجاد:

$$\hat{R}_{Bayes}(t)=E[R(t) \backslash T>t]$$
$$R(t)=\Pr(T>t)$$

فان الدالة الاحتمالية اللاحقة لـ θ_1, θ_2, P تكون:

$$f(\theta_1\theta_2,p/t_{1i},t_{2i})=\frac{L(t_{1i}.t_{2i}/\theta_1,\theta_2,p)g(\theta_1,\theta_2,p)}{f(t_{1i},t_{2i})} \qquad ....(11)$$

للاختصار أشرنا لـ $t_{1n_1},...,t_{12},t_{11}$ ب (t_{1i}) كذلك ب (t_{2i}) لـ $t_{2n_2},...,t_{22},t_{21}$

وان $g(\theta_1,\theta_2,p)$ الأحتمال الشرطي السابق لـ θ_1, θ_2, p ويمكن افتراضه حسب قواعد جفري التي سبق ذكرها بالصيغة:

$$g(\theta_1,\theta_2,p)=\frac{1}{\theta_1^c\theta_2^c} \qquad c=1,2,.... \qquad ......(12)$$

وعليه فان:

$$f(\theta_1,\theta_2,p/t_{1i},t_{2i})=\frac{\frac{n!}{n_1!n_2!}\cdot\frac{p^{n_1}}{\theta_1^{n_1+c}}\cdot\frac{(1-p)^{n_2}}{\theta_2^{n_2+c}}\exp\{\frac{-\sum_{i=1}^{n_1}t_{1i}}{\theta_1}-\frac{\sum_{i=1}^{n_2}t_{2i}}{\theta_2}\}}{\frac{n!}{n_1!n_2!}\iiint\limits_{p\theta_2\theta_1}\frac{p^{n_1}}{\theta_1^{n_1+c}}\cdot\frac{(1-p)^{n_2}}{\theta_2^{n_2+c}}\exp\{\frac{-\sum_{i=1}^{n_1}t_{1i}}{\theta_1}-\frac{\sum_{i=1}^{n_2}t_{2i}}{\theta_2}\}d\theta_1 d\theta_2 dp} \quad \ldots\ldots\ (13)$$

Let

$$I=\left\{\int_0^1 P^{n_1}(1-p)^{n_2}\,dp\right\}\left\{\underset{a\to\infty}{Lim}\int_0^a\frac{1}{\theta_1^{n_1+c}}e^{-\sum_{i=1}^{n_1}t_{1i}/\theta_1}d\theta_1\right\}\left\{\underset{b\to\infty}{Lim}\int_0^a\frac{1}{\theta_2^{n_2+c}}e^{-\sum_{i=1}^{n_2}t_{2i}/\theta_2}d\theta_2\right\}\ldots(14)$$

$$I_1=\int_0^1 p^{n_1}(1-p)^{n_2}\,dp=\beta(n_1+1,n_2+1)\ldots.(15)$$

$$I_2=\underset{a\to\infty}{Lim}\int_0^a\frac{1}{\theta_1^{n_1+c}}e^{-\sum_{i=1}^{n_1}t_{1i}/\theta_1}d\theta_1=\frac{\Gamma(n_1+c-1)}{(\sum_{i=1}^{n_1}t_{1i})^{n_1+c-1}}$$

….(16)

$$I_3=\underset{b\to\infty}{Lim}\int_0^b\frac{1}{\theta_2^{n_2+c}}e^{-\sum_{i=1}^{n_2}t_{2i}/\theta_2}d\theta_2=\frac{\Gamma(n_2+c-1)}{(\sum_{i=1}^{n_1}t_{2i})^{n_2+c-1}}$$

وبعد تعويض (14) (15) (16) في المعادلة (13) نجد أن:

$$f(\theta_1,\theta_2,p\setminus t_{1i},t_{2i})=\frac{(n+1)!(\sum_{i=1}^{n_1}t_{1i})^{n_1+c-1}(\sum_{i=1}^{n_2}t_{2i})^{n_2+c-1}\frac{p^{n_1}}{\theta_1^{n_1+c}}.\frac{(1-p)^{n_2}}{\theta_2^{n_2+c}}\exp\left\{\frac{-\sum_{i=1}^{n_1}t_{1i}}{\theta_1}-\frac{\sum_{i=1}^{n_2}t_{2i}}{\theta_2}\right\}}{n_1!n_2!\Gamma(n_1+c-1)\Gamma(n_2+c-1)}\ldots(17)$$

وبماأن

$$R(t)=p_r(T>t)=1-\int_0^t\int_0^t \frac{1}{\theta_1\theta_2}e^{-u_1/\theta_1}e^{-u_2/\theta_2}du_1du_2=e^{-t/\theta_1-t/\theta_2}\quad ...(18)$$

منه يكون مقدر بيز لدالة المعولية

$$\hat{R}_{[Bayes]}(t)=E(R(t)\setminus t_{1i},t_{2i})=\int_p\int_{\theta_2}\int_{\theta_1} f(\theta_1,\theta_2,p\setminus t_{1i},t_{2i})R(t)d\theta_1 d\theta_2 dp...(19)$$

وباستخدام المعادلة (17) اعلاه يكون

$$\hat{R}_{[Bayes]}(t)=K\beta(n_1+1,n_2+1)\ \lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{1}{\theta_1^{n_1+c}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n_1}t_{1i}-t}{\theta_1}}d\theta_1\ \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{\theta_2^{n_2+c}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n_2}t_{2i}+t}{\theta_1}}d\theta_2$$

$$\int_0^1 p^{n_1}(1-p)^{n_2}dp....(20)$$

where

$$K\beta(n_1+1,n_2+1)=\frac{(\sum_{i=1}^{n_1}t_{1i})^{n_1+c-1}(\sum_{i=1}^{n_2}t_{2i})^{n_2+c-1}}{\Gamma(n_1+c-1)\Gamma(n_2+c-1)}$$

وبعد التعويض بالمعادلة (19) وتبسيطها نجد إن

$$\hat{R}_{[Bayes]}(t)=E(R(t)\setminus\sum t_{1i},\sum t_{2i})=\frac{(\sum_{i=1}^{n_1}t_{1i})^{n_1+c-1}(\sum_{i=1}^{n_2}t_{2i})^{n_2+c-1}\Gamma(n_1-1)\Gamma(n_2-1)}{(\sum t_{1i}+t)^{n_1+c-1}(\sum t_{2i}+t)^{n_2+c-1}\Gamma(n_1+c-1)\Gamma(n_2+c-1)}...(21)$$

ويمثل مقدر بيز لدالة معولية التوزيع الاسي المختلط لمجتمعين جزئيين في حالة امكانية تحديد انتماء المفردة لاي مجتمع جزئي.

5-2 الحالة الثانية:

عندما لا يمكن تحديد انتماء المفردة في العينة إلى أي مجتمع جزئي وبفرض K=2 فان الدالة الاحتمالية للمتغير العشوائي تكون[9] .

أما معادلة المعولية فتكون بالصيغة

$$f(t/\theta_1,\theta_2)=p\frac{1}{\theta_1}e^{-t/\theta_1}+(1-p)\frac{1}{\theta_2}e^{-t/\theta_2}\qquad ....(22)$$

$$R(t) = pR_1(t) + (1-p)R_2(t) \qquad .....(23)$$

where

$$R_1(t) = e^{-t/\theta_1} \quad , \quad R_2(t) = e^{-t/\theta_2}$$

أما مقدر بيز لدالة المعولية في حالة k=1 فيكون

$$\hat{R}_i(t) = E(R_i(t) \setminus T > t) = \left[\frac{\sum_{j=1}^{n_1} t_j}{t + \sum_{j=1}^{n_1} t_j}\right]^{n_1+c-1} \qquad i = 1,2...(24)$$

وبما إن المفردة لا يمكن تحديد انتمائها إلى مجتمع جزئي لذا نقترح إن يتم تقدير دالة المعولية للصيغة (23) بـ

$$\hat{R}_{Bayes}(t) = p\hat{R}_1(t) + (1-p)\hat{R}_2(t)...(25)$$

بما يجعل متوسط مربعات الخطأ للمقدر $MSE\left\{\hat{R}_{Bayes}(t)\right\}$ اقل ما يمكن وكما يلي :

$$\hat{R}(t) - R(t) = p\hat{R}_1(t) + (1-p)\hat{R}_2(t) - R + PR - PR$$

سنكتب $\hat{R}$ أختصارا" $\hat{R}(t)$

$$\therefore \hat{R} - R = P(\hat{R}_1 - R) + (1-P)(\hat{R}_2 - R)...(26)$$

وبتربيع الطرفين واخذ التوقع الرياضي يكون

$$E(\hat{R}-R)^2 = P^2E(\hat{R}_1 - R)^2 + (1-P)^2E(\hat{R}_2 - R)^2 + 2P(1-P)E(\hat{R}_1 - R)\ (\hat{R}_2 - R)$$

وبتطبيق تعريف MSE يكون

$$MSE(\hat{R}) = P^2MSE(\hat{R}_1) + (1-P)^2MSE(\hat{R}_2) + 2P(1-P)E(\hat{R}_1 - R)(\hat{R}_2 - R)$$

وبجعل الدالة $MSE(\hat{R})$ في نهايتها الصغرى أي :-

$$\frac{dMSE(\hat{R})}{dp} = 0 \qquad ...(28)$$

وبعد التبسيط والاختصار تكون قيمة P بالصيغة

$$P=\frac{MSE(\hat{R}_2)-E(\hat{R}_1\hat{R}_2)+RE(\hat{R}_1)+RE(\hat{R}_2)-R^2}{MSE(\hat{R}_1)+MSE(\hat{R}_2)-2E(\hat{R}_1\hat{R}_2)+2RE(\hat{R}_1)+2RE(\hat{R}_2)-2R^2}\quad ...(29)$$

ويمكن حساب $E(\hat{R}_i), MSE(\hat{R}_i)$ باستخدام الصيغة (24) كما إن $\hat{R}_2 , \hat{R}_1$ مستقلان فيكون:

$$E(\hat{R}_1\hat{R}_2)=E(\hat{R}_1)E(\hat{R}_2)\quad ....(30)$$

وفي الجوانب التطبيقية يمكن أعداد برنامج على الحاسوب لإيجاد نتائج الصيغ في المعادلات آنفة الذكر سواء كانت بيانات حقيقية تتبع التوزيع الآسي المختلط أو توليد بيانات لها هذا التوزيع.
من اهم الاستنتاجات التي توصلنا لها هو استخدام طرائق بيزية لتقدير المعولية للتوزيعات الاسية المختلطة للعينات الجزئية وذلك بالاستفادة من تحويل التكامل الى دالة كاما.

المصادر:

المصادر العربية :

1-السلطاني ،شروق اجمد كريم (2005)"دراسة ميزات التوزيعات المختلطة "
رسالة ماجستير /كلية العلوم –الجامعة المستنصرية .
2-شاهر ،ثائر فيصل (2005)"طرائق تقدير عدد مرات الفشل في الانظمة القابلة للاصلاح"
اطروحة دكتوراه /كلية الادارة والاقتصاد ،جامعة بغداد .

Foreign References **المصادر الاجنبية**

3- Charles E. Ebeling (1997).
"An introduction to Reliability and maintaility engineering" New york.
4-Ghosh,S.K.and Ebrahimi , N.print (2001),"Bayesian Analysis of the mixing Function in a Mixture of two Exponential Dist",Institute of statistics mimeo series No .2531 ,pp.1-25.
5-Hadi ,Saied Ali and other (1992)"An Introduction to mathematical stat ",AL-Aloum for.
6- Mood, A.M. Boes, D.C and Graybil, F.A (1985)
"introduction to the theory of statistics" 3rd edition Megraw-Hill
7-Pure ,P.S. and Rubin ,H .(1972)"on characterization based on the absolute difference of two i.i.d. random variables "Ann.math .stat.,vol.41 ,pp 2113-2122.
8-Rider ,P.R.(1961)"The method of moment applied to a mixture of two Exponential Dist.",Ann.Math.statis ,32,pp 143-147.
9- Sinha, S.K. nd Kale, B.K. (1980).
"life testing reliability Estimations" wiley Estern limited.
10- Zellner, A. (1971) "An introduction to Bayesian inference in econometrics" John wiley and Sons, New york.