Derivation of numerically method for evaluating tripleintegrals with Continuous Integrands andForm of Error (Correction Terms)

اشتقاق طريقة عددية لحساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة وصيغةالخطأ لها

أ.علي حسن محمد م.م صفاء مهدي موسى إحصائي.وفاء محمد عبود
قسم الرياضيات/كلية التربية للبنات/جامعة الكوفة

المستخلص

الهدف الرئيسي من هذا البحث هو اشتقاق طريقة عددية لحساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة في منطقة التكامل وصيغة الخطأ لها إذ قدمنا مبرهنة معا لبرهان لإيجاد حدود التصحيح بالنسبة للتكاملات الثلاثية, وبالاعتماد على حدود التصحيح التي وجدناها قمنا بتحسين نتائج التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة , فوجدنا إن الطريقة المركبة من طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق قاعدة سمبسون على الأبعاد الثلاثة x , y و z عندما عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الأوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الخارجي أي إن $h=\overline{h}=\overline{\overline{h}}$ حيث h المسافات بين الإحداثيات على المحور z و $\overline{h}$ المسافات بين الإحداثيات على المحور y و $\overline{\overline{h}}$ المسافات بين الإحداثيات على المحور x وأسميناها $RSSS$ حيث يمكن الاعتماد عليها في حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة في منطقة التكامل اذ أعطت دقة عالية في النتائج بفترات جزئية قليلة نسبيا وبوقت اقل مما احتاجته الباحثتان ضياء [5]وعكار[6].

Abstract

The main aim of this search is to derivation numerically method to find the values of the triple integrals, Its integrands continuous in region of the integrals and to find the general form of the errors (correction terms) We have also introduced one theorem to find the correction errors bounds with respect to the triple integral , we applied the new formula to calculate the triple integral and found this method ($RSSS$ method , it is composition method of applying Romberg accelration method on the obtained values of applying Simpson's rule on the three dimension x , y and z when the number of subintervals of interval of interior integral equal to the number of subintervals of interval of middle integral and equal to the number of subintervals of exterior integral $\left(\overline{\overline{h}}=\overline{h}=h\right)$ when h is the distances between the coordinates on the z - axis , $\overline{h}$ is the distances between the coordinates on the y - axis and $\overline{\overline{h}}$ is the distances between the coordinates on the x - axis) , we can depend on it to calculate the triple integrals and give higher accuracy in the results by few subintervals and time less than the request timethat researchers Dayaa [5] and Eghaar[6] needed to it .

1.المقدمة

أن للتكاملات الثلاثية أهمية في إيجاد الحجوم والمراكز المتوسطة وعزم القصور الذاتي للحجوم على سبيل المثال الحجم الواقع بين القطع المكافئ $z=2x^2+y^2$ والاسطوانة $z=4-y^2$, والحجم الواقع داخل الاسطوانة $\rho=4\cos(\theta)$ المحدد من الأعلى بالكرة $\rho^2+z^2=16$ ومن الأسفل بالمستوي $z=0$, وحساب المركز المتوسط للحجم الوقع داخل $x^2+y^2=9$ وفوق المستوي $z=0$ وتحت المستوي $x+z=4$, وكذلك تبرز أهميتها في إيجاد الكتل ذات الكثافة المتغيرة مثل قطعة من سلك رفيعاً وصفيحة رقيقة من المعدن.فرانك آيرز [7] .

وقد عمل عدد من الباحثين في مجال التكاملات الثلاثية منهم ضياء [5] في عام 2009 استخدمت طرائق مركبة هي $RMRM\,(RS)$, $RMRM\,(RM)$, $RMRS\,(RM)$ و $RMRS\,(RS)$ وهذه الطرائق ناتجة من طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى (RM) على البعد الخارجي (z) و $RS\,(RS), RS\,(RM), RM\,(RM), RM\,(RS)$ على البعد الأوسط (y) والبعد الداخلي (x) وقد توصلت إلى إن الطريقة المركبة متقاعدة سمبسون مع تعجيل رومبرك على البعدين الداخلي والأوسط وقاعدة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك على البعد الخارجي $RMRS\,(RS)$ هي الأفضل عند حساب تكاملات ثلاثية التي مكاملاتها دوال مستمرة في منطقة التكامل .

وفي عام 2010 قدمت عكار [6] طريقة عددية جديدة مغايرة للطريقة التي استخدمتها ضياء [5] لحساب قيم التكاملات الثلاثية وذلك باستعمال طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق قاعدة النقطة الوسطى على الأبعاد x و y و z عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الأوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الخارجي وأسمتها $RMMM$ وحصلت على نتائج جيدة من حيث الدقة وبفترات جزئية قليلة نسبياً.

أما في هذا البحث قدمنا مبرهنة مع البرهان لاشتقاق طريقة عددية جديدة لحساب قيم تقريبية للتكاملات الثلاثية التي مكاملاتها دوال مستمرة في منطقة التكامل وصيغة الخطأ لها وهذه الطريقة عبارة عن طريقة مركبة من طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة سمبسون المطبقة على الأبعاد الثلاثة (الداخلي والأوسط والخارجي) عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الأوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الخارجي أي أن المسافة بين الإحداثيات على المحور x مساوية للمسافات بين الإحداثيات على المحور y ومساوية للمسافات بين الإحداثيات على المحور z ولاحظنا إن هذه الطريقة مع استخدام حدود التصحيح التي وجدناها تعطي نتائج جيدة وسريعة من حيث الدقة وبعدد فترات جزئية قليلة نسبياً ولاتستغرق وقت كبير مقارنة مع أفضل الطرائق التي ناقشتها ضياء [5] , والطريقة التي تناولتها عكار [6].

2.اشتقاق طريقة عددية لحساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة وصيغة الخطأ لها

سوف نقدم مبرهنة مع البرهان نستعرض فيها اشتقاق طريقة عددية جديدة (تقدم لأول مرة) لحساب قيم التكاملات الثلاثية وتطبيق طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق قاعدة سمبسون على الأبعاد الثلاثة عندما $m = n_1 = n_2$) n_2 عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[a,b]$ و n_1 عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[c,d]$ و m عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[e,g]$) أي إن $\left(\overline{\overline{h}} = \overline{h} = h\right)$ نرمز لهذه الطريقة بالرمز $RSSS$ حيث R طريقة تعجيل رومبرك و SSS قاعدة سمبسون المطبقة على الأبعاد الثلاثة والمبرهنة هي .

***مبرهنة*:**

لتكن $f\,(x,y,z)$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقاط المنطقة $[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$ فان القيمة التقريبية للتكامل $I = \int_e^g\int_c^d\int_a^b f\,(x,y,z)$ باستخدام قاعدة سمبسون على الابعاد الثلاثة z,y,x يمكن حسابها من القاعدة الآتية

$$SSS = \int_e^g\int_c^d\int_a^b f\,(x,y,z)\,dxdydz = \frac{h^3}{27}[f\,(a,c,e)+f\,(a,c,g)+f\,(a,d,e)+f\,(a,d,g)+f\,(b,c,e)$$

$$+f\,(b,c,g)+f\,(b,d,e)+f\,(b,d,g)+\ 4\sum_{i=1}^{n}[f\,(x_{(2i-1)},c,e)\ +\ f\,(x_{(2i-1)},c,g)+f\,(x_{(2i-1)},d,e)+f\,(x_{(2i-1)},d,g)]$$

$$+2\sum_{i=1}^{n-1}[f\,(x_{2i},c,e)+f\,(x_{2i},c,g)+f\,(x_{2i},d,e)+f\,(x_{2i},d,g)]+4\sum_{j=1}^{n}\ [f\,(a,y_{(2j-1)},e)+f\,(a,y_{(2j-1)},g)$$

$$+f\,(b,y_{(2j-1)},e)+f\,(b,y_{(2j-1)},g)+4\sum_{i=1}^{n}[f\,(x_{(2i-1)},y_{(2j-1)},e)+f\,(x_{(2i-1)},y_{(2j-1)},g)]+2\sum_{i=1}^{n-1}[f\,(x_{2i},y_{(2j-1)},e)$$

$$+f(x_{2i},y_{(2j-1)},g)]]+2\sum_{j=1}^{n-1}[f(a,y_{2j},e)+f(a,y_{2j},g)+f(b,y_{2j},e)+f(b,y_{2j},g)+4\sum_{i=1}^{n}[f(x_{(2i-1)},y_{2j},e)$$

$$+f(x_{(2i-1)},y_{2j},g)]+2\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{2i},y_{2j},e)+f(x_{2i},y_{2j},g)]]+4\sum_{k=1}^{n}[f(a,c,z_{(2k-1)})+f(a,d,z_{(2k-1)})+f(b,c,z_{(2k-1)})$$

$$+f(b,d,z_{(2k-1)})+4\sum_{i=1}^{n}[f(x_{(2i-1)},c,z_{(2k-1)})+f(x_{(2i-1)},d,z_{(2k-1)})]+2\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{2i},c,z_{(2k-1)})+f(x_{2i},d,z_{(2k-1)})]$$

$$+4\sum_{j=1}^{n}[f(a,y_{(2j-1)},z_{(2k-1)})+f(b,y_{(2j-1)},z_{(2k-1)})+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{(2i-1)},y_{(2j-1)},z_{(2k-1)})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_{(2j-1)},z_{(2k-1)})]$$

$$+2\sum_{j=1}^{n-1}[f(a,y_{2j},z_{(2k-1)})+f(b,y_{2j},z_{(2k-1)})+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{(2i-1)},y_{2j},z_{(2k-1)})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_{2j},z_{(2k-1)})]]+2\sum_{k=1}^{n-1}[f(a,c,z_{2k})$$

$$+f(a,d,z_{2k})+f(b,c,z_{2k})+f(b,d,z_{2k})+4\sum_{i=1}^{n}[f(x_{(2i-1)},c,z_{2k})+f(x_{(2i-1)},d,z_{2k})]+2\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{2i},c,z_{2k})$$

$$+f(x_{2i},d,z_{2k})]+4\sum_{j=1}^{n}[f(a,y_{(2j-1)},z_{2k})+f(b,y_{(2j-1)},z_{2k})+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{(2i-1)},y_{(2j-1)},z_{2k})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_{(2j-1)},z_{2k})]$$

$$+2\sum_{j=1}^{n-1}[f(a,y_{2j},z_{2k})+f(b,y_{2j},z_{2k})+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{(2i-1)},y_{2j},z_{2k})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_{2j},z_{2k})]]]$$

$x_{(2i)}=a+(2i)h\ ,\ i=1,2,\dots,n\text{-}1$ و $x_{(2i-1)}=a+(2i-1)h\ ,\ i=1,2,\dots,n$

$y_{(2j)}=c+(2j)h\ ,\ j=1,2,\dots,n\text{-}1$ و $y_{(2j-1)}=c+(2j-1)h\ ,\ j=1,2,\dots,n$

$z_{(2k)}=e+(2k)h\ ,\ k=1,2,\dots,n\text{-}1$ و $z_{(2k-1)}=e+(2k-1)h\ ,\ k=1,2,\dots,n$

وصيغة حدود التصحيح (صيغة الخطأ) هي:- $I-SSS(h)=Ah^4+Bh^6+Ch^8+\cdots$

حيث أن $A,B,C,\dots$ ثوابت .

البرهان

يمكن كتابة التكامل I بالصورة الآتية :

$$I=\int_e^g\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dxdydz=SSS(h)+E(h) \quad ...(1)$$

إذ إن $SSS(h)$ هي قيمة التكامل عددياً باستخدام قاعدة سمبسون على الأبعاد الثلاثة x , y و z . وان $E(h)$ هي سلسلة حدود التصحيح الممكن إضافتها إلى قيم $SSS(h)$, وان $\frac{b-a}{n_2}=\frac{d-c}{n_1}=\frac{g-e}{m}$ بفرض إن $m=n_1=n_2$.

معلوم لدينا أن صيغة الخطأ للتكاملات الأحادية ذات المكاملات المستمرة باستخدام قاعدة سمبسون هي

$$E_S(h)=-\frac{1}{180}h^4(f_{2n}^{(3)}-f_0^{(3)})+\frac{1}{1512}h^6(f_{2n}^{(5)}-f_0^{(5)})-\cdots \quad ...(2)$$

فوكس [1]

وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التفاضل Mean-value theorem for derivatives للصيغة (2) نحصل على:-

$$E_S(h)=\frac{-(x_{2n}-x_0)}{180}h^4f^{(4)}(\mu_1)+\frac{(x_{2n}-x_0)}{1512}h^6f^{(6)}(\mu_2)+\dots \quad ...(3)$$

حيث $\mu_i\in(x_0,x_{2n})$, $i=1,2,3,\dots$.عكار[6] . يمكن كتابة التكامل I بالاتي

$$\int_e^g\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdydz=\int_a^b\int_c^d\int_e^g f(x,y)dzdydx$$

فبالنسبة للتكامل الأحادي $\int_e^g f(x,y,z)dz$ يمكن حسابه عددياً بقاعدة سمبسون على البعد z و (التعامل مع x و y كثابتين) وقيمته

$$\int_e^g f(x,y,z)dz = \frac{h}{3}\left(f(x,y,e)+f(x,y,g)+4\sum_{k=1}^{n} f(x,y,z_{(2k-1)})+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x,y,z_{(2k)})\right)$$
$$-\frac{(g-e)h^4}{180}\frac{\partial^4 f(x,y,\mu_1)}{\partial z^4}+\frac{(g-e)h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(x,y,\mu_2)}{\partial z^6}+\ldots \qquad \cdots(4)$$

حيث ان $z_{(2k-1)} = e+(2k-1)h$, $k=1,2,\ldots,n$, $z_{2k} = e+2kh$, $k=1,2,\ldots,n-1$, $\ldots,\mu_2,\mu_1 \in (e,g)$

وبمكاملة الصيغة (4) عدديا على الفترة $[c,d]$ أيضا باستخدام قاعدة سمبسون على البعد y نحصل على :

$$\int_c^d\int_e^g f(x,y,z)dzdy = \frac{h^2}{9}\Big[f(x,c,e)+f(x,c,g)+f(x,d,e)+f(x,d,g)$$
$$+4\sum_{j=1}^{n}\left(f(x,y_{(2j-1)},e)+f(x,y_{(2j-1)},g)\right)+2\sum_{j=1}^{n-1}\left(f(x,y_{(2j)},e)+f(x,y_{(2i)},g)\right)$$
$$+4\sum_{k=1}^{n}\left(f(x,c,z_{(2k-1)})+f(x,d,z_{(2k-1)})+4\sum_{j=1}^{n} f(x,y_{(2j-1)},z_{(2k-1)})+2\sum_{j=1}^{n-1} f(x,y_{(2j)},z_{(2k)})\right)$$
$$+2\sum_{k=1}^{n-1}\left(f(x,c,z_{(2k)})+f(x,d,z_{(2k)})+4\sum_{j=1}^{n} f(x,y_{(2j-1)},z_{(2k)})+2\sum_{j=1}^{n-1} f(x,y_{(2j)},z_{(2k)})\right)\Big]$$
$$+\frac{h}{3}\Big[\frac{-(d-c)}{180}h^4\frac{\partial^4 f(x,\xi_1,e)}{\partial y^4}+\frac{(d-c)}{1512}h^6\frac{\partial^6 f(x,\xi_2,e)}{\partial y^6}+\cdots-\frac{(d-c)}{180}h^4\frac{\partial^4 f(x,\xi_1,g)}{\partial y^4}$$
$$+\frac{(d-c)}{1512}h^6\frac{\partial^6 f(x,\xi_2,g)}{\partial y^6}+\ldots\Big]+4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-(d-c)}{180}h^4\frac{\partial^4 f(x,\xi_{1k},z_{(2k-1)})}{\partial y^4}+\frac{(d-g)}{1512}h^6\frac{\partial^6 f(x,\xi_{2k},z_{(2k-1)})}{\partial y^6}+\ldots\right)$$
$$+2\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{-(d-c)}{180}h^4\frac{\partial^4 f(x,\xi_{1k},z_{2k})}{\partial y^4}+\frac{(d-c)}{1512}h^6\frac{\partial^6 f(x,\xi_{2k},z_{2k})}{\partial y^6}+\cdots\right)\Big]$$
$$+\int_c^d\left[-\frac{(g-e)h^4}{180}\frac{\partial^4 f(x,y,\mu_1)}{\partial z^4}+\frac{(g-e)h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(x,y,\mu_2)}{\partial z^6}+\cdots\right]dy \qquad \ldots(5)$$

حيث ان

$r=1,2,\ldots,\ \xi_{rk}\in(c,d),\quad j=1,2,\ldots n,\ y_{(2j-1)}=c+(2j-1)h,\quad j=1,2,\ldots n-1,\ y_{2j}=c+2jh$

$k=1,2,\ldots n\ ,\ z_{2k-1}=e+(2k-1)h\qquad k=1,2,\ldots n-1\ ,\ z_{2k}=e+2kh$

وبمكاملة الصيغة (5) عدديا على الفترة $[a,b]$ أيضا باستخدام قاعدة سمبسون على البعد x نحصل على:

$$SSS=\int_e^g\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dxdydz = \frac{h^3}{27}[f(a,c,e)+f(a,c,g)+f(a,d,e)+f(a,d,g)+f(b,c,e)$$

$$+f(b,c,g)+f(b,d,e)+f(b,d,g)+\ 4\sum_{i=1}^{n}[f(x_{(2i-1)},c,e)\ +\ f(x_{(2i-1)},c,g)+f(x_{(2i-1)},d,e)+f(x_{(2i-1)},d,g)]$$

$$+2\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{2i},c,e)+f(x_{2i},c,g)+f(x_{2i},d,e)+f(x_{2i},d,g)]+4\sum_{j=1}^{n}\ [f(a,y_{(2j-1)},e)+f(a,y_{(2j-1)},g)$$

$$+f(b,y_{(2j-1)},e)+f(b,y_{(2j-1)},g)+4\sum_{i=1}^{n}[f(x_{(2i-1)},y_{(2j-1)},e)+f(x_{(2i-1)},y_{(2j-1)},g)]+2\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{2i},y_{(2j-1)},e)$$

$$+f(x_{2i},y_{(2j-1)},g)]]+2\sum_{j=1}^{n-1}[f(a,y_{2j},e)+f(a,y_{2j},g)+f(b,y_{2j},e)+f(b,y_{2j},g)+4\sum_{i=1}^{n}[f(x_{(2i-1)},y_{2j},e)$$

$$+f(x_{(2i-1)},y_{2j},g)]+2\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{2i},y_{2j},e)+f(x_{2i},y_{2j},g)]]+4\sum_{k=1}^{n}[f(a,c,z_{(2k-1)})+f(a,d,z_{(2k-1)})+f(b,c,z_{(2k-1)})$$

$$+f(b,d,z_{(2k-1)})+4\sum_{i=1}^{n}[f(x_{(2i-1)},c,z_{(2k-1)})+f(x_{(2i-1)},d,z_{(2k-1)})]+2\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{2i},c,z_{(2k-1)})+f(x_{2i},d,z_{(2k-1)})]$$

$$+4\sum_{j=1}^{n}[f(a,y_{(2j-1)},z_{(2k-1)})+f(b,y_{(2j-1)},z_{(2k-1)})+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{(2i-1)},y_{(2j-1)},z_{(2k-1)})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_{(2j-1)},z_{(2k-1)})]$$

$$+2\sum_{j=1}^{n-1}[f(a,y_{2j},z_{(2k-1)})+f(b,y_{2j},z_{(2k-1)})+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{(2i-1)},y_{2j},z_{(2k-1)})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_{2j},z_{(2k-1)})]]+2\sum_{k=1}^{n-1}[f(a,c,z_{2k})$$

$$+f(a,d,z_{2k})+f(b,c,z_{2k})+f(b,d,z_{2k})+4\sum_{i=1}^{n}[f(x_{(2i-1)},c,z_{2k})+f(x_{(2i-1)},d,z_{2k})]+2\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{2i},c,z_{2k})$$

$$+f(x_{2i},d,z_{2k})]+4\sum_{j=1}^{n}[f(a,y_{(2j-1)},z_{2k})+f(b,y_{(2j-1)},z_{2k})+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{(2i-1)},y_{(2j-1)},z_{2k})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_{(2j-1)},z_{2k})]$$

$$+2\sum_{j=1}^{n-1}[f(a,y_{2j},z_{2k})+f(b,y_{2j},z_{2k})+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{(2i-1)},y_{2j},z_{2k})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_{2j},z_{2k})]]]$$

$$+\frac{h^2}{9}\Bigg[\frac{-(b-a)}{180}h^4\frac{\partial^4 f(\lambda_1,c,e)}{\partial x^4}+\frac{(b-a)}{1512}h^6\frac{\partial^6 f(\lambda_2,c,e)}{\partial x^6}+\cdots+\frac{-(b-a)}{180}h^4\frac{\partial^4 f(\lambda_1,d,e)}{\partial x^4}$$

$$+\frac{(b-a)}{1512}h^6\frac{\partial^6 f(\lambda_2,d,e)}{\partial x^6}+\cdots-\frac{(b-a)}{180}h^4\frac{\partial^4 f(\lambda_1,c,g)}{\partial x^4}+\frac{(b-a)}{1512}h^6\frac{\partial^6 f(\lambda_2,c,g)}{\partial x^6}+\cdots$$

$$-\frac{(b-a)}{180}h^4\frac{\partial^4 f(\lambda_1,d,g)}{\partial x^4}+\frac{(b-a)}{1512}h^6\frac{\partial^6 f(\lambda_2,d,g)}{\partial x^6}+\cdots$$

$$+4\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{-(b-a)}{180}h^4\frac{\partial^4 f(\lambda_{1j},y_{2j-1},e)}{\partial x^4}+\frac{(b-a)}{1512}h^6\frac{\partial^6 f(\lambda_{2j},y_{2j-1},e)}{\partial x^6}+\cdots.\right)$$

$$+4\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{-(b-a)}{180}h^4\frac{\partial^4 f(\lambda_{1j},y_{2j-1},g)}{\partial x^4}+\frac{(b-a)}{1512}h^6\frac{\partial^6 f(\lambda_{2j},y_{2j-1},g)}{\partial x^6}+\cdots\right)$$

$$+2\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{-(b-a)}{180}h^4\frac{\partial^4 f(\lambda_{1j},y_{2j},e)}{\partial x^4}+\frac{(b-a)}{1512}h^6\frac{\partial^6 f(\lambda_{2j},y_{2j-1},e)}{\partial x^6}+\cdots\right)$$

$$+2\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{-(b-a)}{180}h^4\frac{\partial^4 f(\lambda_{1j},y_{2j},g)}{\partial x^4}+\frac{(b-a)}{1512}h^6\frac{\partial^6 f(\lambda_{2j},y_{2j},g)}{\partial x^6}+\cdots\right)$$

$$+4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-(b-a)}{180}h^4\frac{\partial^4 f(\lambda_{1k},c,z_{2k-1})}{\partial x^4}+\frac{(b-a)}{1512}h^6\frac{\partial^6 f(\lambda_{2k},c,z_{2k-1})}{\partial x^6}+\cdots\right)$$

$$+4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-(b-a)}{180}h^4\frac{\partial^4 f(\lambda_{1k},d,z_{2k-1})}{\partial x^4}+\frac{(b-a)}{1512}h^6\frac{\partial^6 f(\lambda_{2k},d,z_{2k-1})}{\partial x^6}+\cdots\right)$$

$$+16\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{-(b-a)}{180}h^4\frac{\partial^4 f(\lambda_{1jk},y_{2j-1},z_{2k-1})}{\partial x^4}+\frac{(b-a)}{1512}h^6\frac{\partial^6 f(\lambda_{2jk},y_{2j-1},z_{2k-1})}{\partial x^6}+\cdots\right)$$

$$+8\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{-(b-a)}{180}h^4\frac{\partial^4 f\,(\lambda_{1jk},y_{2j},z_{2k-1})}{\partial x^4}+\frac{(b-a)}{1512}h^6\frac{\partial^6 f\,(\lambda_{2jk},y_{2j},z_{2k-1})}{\partial x^6}+\cdots\right)$$

$$+2\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{-(b-a)}{180}h^4\frac{\partial^4 f\,(\lambda_{1k},c,z_{2k})}{\partial x^4}+\frac{(b-a)}{1512}h^6\frac{\partial^6 f\,(\lambda_{2k},c,z_{2k})}{\partial x^6}+\cdots\right)$$

$$+2\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{-(b-a)}{180}h^4\frac{\partial^4 f\,(\lambda_{1k},d,z_{2k})}{\partial x^4}+\frac{(b-a)}{1512}h^6\frac{\partial^6 f\,(\lambda_{2k},d,z_{2k})}{\partial x^6}+\cdots\right)$$

$$+8\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{-(b-a)}{180}h^4\frac{\partial^4 f\,(\lambda_{1jk},y_{2j-1},z_{2k})}{\partial x^4}+\frac{(b-a)}{1512}h^6\frac{\partial^6 f\,(\lambda_{2jk},y_{2j-1},z_{2k})}{\partial x^6}+\cdots\right)$$

$$+4\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{-(b-a)}{180}h^4\frac{\partial^4 f\,(\lambda_{1jk},y_{2j},z_{2k})}{\partial x^4}+\frac{(b-a)}{1512}h^6\frac{\partial^6 f\,(\lambda_{2jk},y_{2j},z_{2k})}{\partial x^6}+\cdots\right)\Bigg]$$

$$\ldots(6)\;+\int_a^b\int_c^d\left[-\frac{(g-e)h^4}{180}\frac{\partial^4 f\,(x,y,\mu_1)}{\partial z^4}+\frac{(g-e)h^6}{1512}\frac{\partial^6 f\,(x,y,\mu_2)}{\partial z^6}+\cdots\right]dy\,dx$$

حيث ان

$$x_{(2i)}=a+(2i)h\ ,\ i=1,2,\ldots,n\text{-}1 \ \text{و}\ x_{(2i-1)}=a+(2i-1)h\ ,\ i=1,2,\ldots,n$$

$$y_{(2j)}=c+(2j)h\ ,\ j=1,2,\ldots,n\text{-}1 \ \text{و}\ y_{(2j-1)}=c+(2j-1)h\ ,\ j=1,2,\ldots,n$$

$$z_{(2k)}=e+(2k)h\ ,\ k=1,2,\ldots,n\text{-}1 \ \text{و}\ z_{(2k-1)}=e+(2k-1)h\ ,\ k=1,2,\ldots,n$$

وبما إن $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4},\frac{\partial^6 f}{\partial x^6},\ldots$ و $\frac{\partial^4 f}{\partial y^4},\frac{\partial^6 f}{\partial y^6},\ldots$ و $\frac{\partial^4 f}{\partial z^4},\frac{\partial^6 f}{\partial z^6},\ldots$دوال مستمرة في كل نقطة من نقاط المنطقة $[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$.

فان صيغة حدود التصحيح للتكامل الثنائي I بقاعدة سمبسون على الأبعاد xو yو zتصبح :-

$$E_{sss}(h)=(g-e)(d-c)(b-a)\left(\frac{-h^4}{180}\frac{\partial^4 f\left(\overline{n_1},\overline{\mu_1},\overline{\kappa_1}\right)}{\partial x^4}+\frac{h^6}{1512}\frac{\partial^6 f\left(\overline{n_2},\overline{\mu_2},\overline{\kappa_2}\right)}{\partial x^6}-\cdots\right)+(g-e)(d-c)(b-a)\left(\frac{-h^4}{180}\frac{\partial^4 f\left(\overline{\overline{n_1}},\overline{\overline{\mu_1}},\overline{\overline{\kappa_1}}\right)}{\partial y^4}\right.$$

$$\left.+\frac{h^6}{1512}\frac{\partial^6 f\left(\overline{\overline{n_2}},\overline{\overline{\mu_2}},\overline{\overline{\kappa_2}}\right)}{\partial y^6}-\cdots\right)+(g-e)(d-c)(b-a)\left(\frac{-h^4}{180}\frac{\partial^4 f\left(\hat{n}_1,\hat{\mu}_1,\hat{\kappa}_1\right)}{\partial z^4}+\frac{h^6}{1512}\frac{\partial^6 f\left(\hat{n}_2,\hat{\mu}_2,\hat{\kappa}_2\right)}{\partial z^6}-\cdots\right)$$

$$E_{sss}(h)=(g-e)(d-c)(b-a)\frac{h^2}{180}\left(\frac{\partial^4 f\left(\overline{n_1},\overline{\mu_1},\overline{\kappa_1}\right)}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 f\left(\overline{\overline{n_1}},\overline{\overline{\mu_1}},\overline{\overline{\kappa_1}}\right)}{\partial y^4}+\frac{\partial^4 f\left(\hat{n}_1,\hat{\mu}_1,\hat{\kappa}_1\right)}{\partial z^4}\right)$$

$$+(g-e)(d-c)(b-a)\frac{h^6}{1512}\left(\frac{\partial^4 f\left(\overline{n_2},\overline{\mu_2},\overline{\kappa_2}\right)}{\partial x^6}+\frac{\partial^4 f\left(\overline{\overline{n_2}},\overline{\overline{\mu_2}},\overline{\overline{\kappa_2}}\right)}{\partial y^6}+\frac{\partial^4 f\left(\hat{n}_2,\hat{\mu}_2,\hat{\kappa}_2\right)}{\partial z^6}\right)+\cdots\qquad\cdots(7)$$

$$\ldots,\left(\overline{n_2},\overline{\mu_2},\overline{\kappa_2}\right),\left(\overline{n_1},\overline{\mu_1},\overline{\kappa_1}\right)\in[a,b]\times[c,d]\times[e,g],\quad \ldots,\left(\overline{\overline{n_2}},\overline{\overline{\mu_2}},\overline{\overline{\kappa_2}}\right),\left(\overline{\overline{n_1}},\overline{\overline{\mu_1}},\overline{\overline{\kappa_1}}\right)\in[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$$

$$\ldots,\left(\hat{n}_2,\hat{\mu}_2,\hat{\kappa}_2\right),\left(\hat{n}_1,\hat{\mu}_1,\hat{\kappa}_1\right)\in[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$$

لذا إذا كان المكامل دالة مستمرة ومشتقاتها الجزئية موجودة Exist في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$ فانه يمكن كتابة صيغة الخطأ للقاعدة المذكورة كالآتي :

$$I-SSS\left(h\right)=Ah^4+Bh^6+Ch^8+\ldots \quad \ldots(8)$$

حيث $A,B,\ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة في منطقة التكامل وبذلك ينتهي البرهان .

فبأستعمال قاعدة SSS وحدود التصحيح التي برهناها في حساب التكاملات الثلاثيةنبدأ بوضع $m=n_1=n_2=2$ في الصيغة أعلاه ونحسب القيمة التقريبية للتكامل الثلاثي والتي تساوي

$$\int_e^g\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dxdydz=\frac{h^3}{27}\big[f(a,c,e)+f(a,c,g)+f(a,d,e)+f(a,d,g)+f(b,c,e)+f(b,c,g)$$
$$+f(b,d,e)+f(b,d,g)+4(f(a+h,c,e)+f(a+h,c,g)+f(a+h,d,e)+f(a+h,d,g)+f(a,c+h,e)$$
$$+f(a,c+h,g)+f(b,c+h,e)+(b,c+h,g)+f(a,c,e+h)+f(b,c,e+h)+f(a,d,e+h)+f(b,d,e+h))$$
$$+16(f(a+h,c+h,e)+f(a+h,c+h,g)+f(a,c+h,e+h)f(b,c+h,e+h)+f(a+h,c,e+h)+f(a+h,d,e+h)$$
$$+4(f(a+h,c+h,e+h))\big]$$

ونثبت في جداولنا هذه القيمة التقريبية عندما $m=n_1=n_2=2$ ثم نضع $m=n_1=n_2=4$ و نحسب SSS حيث إنها تساوي

$$\int_e^g\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dxdydz=\frac{h^3}{27}\big[f(a,c,e)+f(a,c,g)+f(a,d,e)+f(a,d,g)+f(b,c,e)+f(b,c,g)$$
$$+f(b,d,e)+f(b,d,g)+2\big(f(x_2,c,e)+f(x_2,c,g)+f(x_2,d,e)+f(x_2,d,g)+f(a,y_2,e)+f(a,y_2,g)$$
$$+f(b,y_2,e)+f(b,y_2,g)+f(a,c,z_2)+f(a,d,z_2)+f(b,c,z_2)+f(b,d,z_2)+2\big(f(x_2,y_2,e)+f(x_2,y_2,g)$$
$$+f(x_2,c,z_2)+f(x_2,d,z_2)+f(a,y_2,z_2)+f(b,y_2,z_2)+2f(x_2,y_2,z_2)+4\sum_{i=1}^{2}f(x_{(2i-1)},y_2,z_2)\big)$$
$$+4\sum_{i=1}^{2}\big(f(x_{(2i-1)},y_2,e)+f(x_{(2i-1)},y_2,g)+f(x_{(2i-1)},c,z_2)+f(x_{(2i-1)},d,z_2)\big)$$
$$+4\sum_{j=1}^{2}\big(f(a,y_{(2j-1)},z_2)+f(b,y_{(2j-1)},z_2)+2f(x_2,y_{(2j-1)},z_2)+4\sum_{i=1}^{2}f(x_{(2i-1)},y_{(2j-1)},z_2)\big)\big)$$
$$+4\sum_{i=1}^{2}\big(f(x_{(2i-1)},c,e)+f(x_{(2i-1)},c,g)+f(x_{(2i-1)},d,e)+f(x_{(2i-1)},d,g)\big)+4\sum_{j=1}^{2}\Big(f(a,y_{(2j-1)},e)+f(a,y_{(2j-1)},g)$$
$$+f(b,y_{(2j-1)},e)+f(b,y_{(2j-1)},g)+2(f(x_2,y_{(2j-1)},e)+f(x_2,y_{(2j-1)},g))+4\sum_{i=1}^{2}\Big(f(x_{(2i-1)},y_{(2j-1)},e)+f(x_{(2i-1)},y_{(2j-1)},g)\Big)\Big)$$
$$+4\sum_{k=1}^{2}\Big[f(a,c,z_{(2k-1)})+f(a,d,z_{(2k-1)})+f(b,c,z_{(2k-1)})+f(b,d,z_{(2k-1)})+2(f(x_2,c,z_{(2k-1)})+f(x_2,d,z_{(2k-1)})$$
$$+f(a,y_2,z_{(2k-1)})+f(b,y_2,z_{(2k-1)})+2f(x_2,y_2,z_{(2k-1)})+4\sum_{j=1}^{2}f(x_{2i-1},y_2,z_{(2k-1)}))+4\sum_{j=1}^{2}\big(f(a,y_{(2j-1)},z_{(2k-1)})$$
$$+f(b,y_{(2j-1)},z_{(2k-1)})+2f(x_2,y_{(2j-1)},z_{(2k-1)})+4\sum_{i=1}^{2}f(x_{(2i-1)},y_{(2j-1)},z_{(2k-1)})\big)\Big]$$

أيضا نثبت هذه القيمة في جداولنا على إنها القيمة التقريبية للتكامل الثلاثي I .ويمكننا تحسين القيمتين التقريبيتين اللتين حصلنا عليهما بتطبيق طريقة تعجيل رومبرك عليهما وبذلك نحصل على قيمة تقريبية للتكامل الثلاثي بطريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة سمبسون على الأبعاد الثلاثة x y ,و z .وهكذا نستمر بتطبيق قاعدة SSS بالنسبة لبقية قيم $m = n_1 = n_2 > 2$ ثم نطبق عليها طريقة تعجيل رومبرك لتعجيل اقتراب القيم إلى القيمة المضبوطة للتكامل إلى أن نحصل على القيمة بالدقة المرغوبة التي نختارها.

3.الأمثلة

1- $I = \int_1^2\int_1^2\int_1^2 \ln(x+y+z)\,dxdydz$ إذا ن قيمته التحليلية هي 1.4978022885754(مقربة إلى ثلاث عشرمرتبةعشرية) .

2- $I = \int_2^3\int_1^2\int_0^1 xe^{-(x+y+z)}\,dxdydz$ إذ إن قيمته التحليلية هي 0.005256743455 (مقربة إلى اثنتي عشرة مرتبة عشرية)

3- $I = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y+z)\right)dxdydz$ إذ إن قيمته التحليلية هي0.5160245509312 (مقربة إلى ثلاث عشر مرتبة عشرية) .

4.النتائج

إن مكامل التكامل $I = \int_1^2\int_1^2\int_1^2 \ln(x+y+z)\,dxdydz$ معرف لكل $(x,y,z) \in [1,2]\times[1,2]\times[1,2]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح للتكامل تكون مماثلة للصيغة (8) والجدول (1) يبين حساب التكامل أعلاه عددياً باستعمال طريقة $RSSS$

$m = n_1 = n_2$	قيم قاعدةSSS	k=4	k=6	k=8
2	1.4977854692327			
4	1.4978012125274	1.4978022620804		
8	1.4978022209020	1.4978022881270	1.4978022885404	
16	1.4978022843391	1.4978022885682	1.4978022885752	1.4978022885754
				1.4978022885754

الجدول (1) حساب التكامل الثلاثي $I = \int_1^2\int_1^2\int_1^2 \ln(x+y+z)\,dxdydz$

نستنتج من الجدول انه عندما $m = n_1 = n_2 = 16$ ان قيمة التكامل باستخدام قاعدة SSSتكون صحيحة لثمان مراتب عشرية وعند استعمال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة حصلنا على قيمة مطابقة للقيمة التحليلية (مقربة لثلاث عشر مرتبة عشرية) وبـ (2^{12} فترة جزئية) .
في حين حصلت عكار [6] على قيمة صحيحة لاربع مراتب عشرية باستخدام قاعدة MMM بالفترة الجزئية نفسها وبتطبيق تعجيل رومبرك حصلت على العدد نفسه من المراتب العشرية الصحيحة بينما حصلت ضياء [5]على القيمة نفسها ولكن باستخدام فترات جزئية اكبر حيث $n_2 = 16$, $n_1 = 32$ و $m = 16$ (2^{13} فترة جزئية) باستخدام جميع الطرائق المشار إليها في المقدمة .

كذلك مكامل التكامل $I = \int_2^3\int_1^2\int_0^1 xe^{-(x+y+z)}\,dxdydz$ معرف لكل $(x,y,z) \in [0,1]\times[1,2]\times[2,3]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح لهذا التكامل تكون مماثلة للصيغة (8) والجدول (2) يبين حساب التكامل أعلاه عددياً باستعمال طريقة $RSSS$.

$m = n_1 = n_2$	قيم القاعدةSSS	k=4	k=6	k=8
2	0.005245338612			
4	0.005256003598	0.005256714598		
8	0.005256696770	0.005256742981	0.005256743432	
16	0.005256740530	0.005256743448	0.005256743455	0.005256743455
				0.005256743455

الجدول (2) حساب التكامل الثلاثي $I = \int_2^3\int_1^2\int_0^1 xe^{-(x+y+z)}\,dxdydz$

نستنتج من الجدول انه عندما $m = n_1 = n_2 = 8$ ان قيمة التكامل بقاعدة SSS تكون صحيحة لسبع مراتب عشرية وباستعمال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة حصلنا على قيمة صحيحة لعشر مراتب عشرية و بـ(2^9فترةجزئية).
في حين حصلنا عندما $m = n_1 = n_2 = 16$ على قيمة صحيحة لثمان مراتب عشرية, وباستعمال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة حصلنا على قيمة مطابقة للقيمة التحليلية (مقربة لاثنتي عشرة مرتبة عشرية) وبـ(2^{12}فترة زئية).
بينما حصلت عكار [6] عندما $m = n_1 = n_2 = 16$ على قيمة صحيحة لخمس مراتب عشرية باستخدام قاعدة MMM وباستعمال طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة MMM حصلت على عدد مساوي من المراتب الصحيحة عندما $m = n_1 = n_2 = 16$ وبـ(2^{12} فترة جزئية).

وكذلك مكامل التكامل $I = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}(x + y + z)\right)dxdydz$ معرف لكل $(x, y, z) \in [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح لهذا التكامل تكون مماثلة للصيغة (8) والجدول (3) يبين حساب التكامل في أعلاه عددياً باستعمال طريقة $RSSS$.

$m = n_1 = n_2$	قيم قاعدةSSS	k=4	K=6	k=8	K=10
2	0.5195620219649				
4	0.5162329264255	0.5160109867229			
8	0.5160373931198	0.5160243575661	0.5160245698017		
16	0.5160253507976	0.5160245479761	0.5160245509985	0.5160245509247	
32	0.5160246008798	0.5160245508852	0.5160245509314	0.5160245509312	0.5160245509312
					0.5160245509312

الجدول (3) حساب التكامل الثلاثي $I = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}(x + y + z)\right)dxdydz$

نستنتج من الجدول انه عندما $m = n_1 = n_2 = 16$ ان القيمة بقاعدة SSSتكون صحيحة لخمس مراتب عشرية وباستعمال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة حصلنا على قيمة صحيحة لعشر مراتب عشرية بـ(2^{12} فترةجزئية).
في حين امكن الحصول على قيمة صحيحة لست مراتب عشرية عندما $m = n_1 = n_2 = 32$ وباستعمال طريقة تعجيل رومبرك حصلنا على قيمة مطابقة للقيمة التحليلية (مقربة لثلاث عشرة مرتبة عشرية) عندما $m = n_1 = n_2 = 32$ وبـ(2^{15}فترةجزئية).

5.المناقشة

نستنتج من خلال نتائج الجداول انه عند حساب التكاملات الثلاثية بقاعدة سمبسون على الأبعاد الثلاثة x , y و z عندما $m = n_1 = n_2$ (حيث n_2 عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[a,b]$ و n_1 عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[c,d]$ و m عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[e,g]$) و $\left(h = \bar{h} = \bar{\bar{h}}\right)$ إن هذه القاعدة (قاعدة SSS) تعطي قيماً صحيحة (لعدة مراتب عشرية) مقارنة مع القيم التحليلية للتكاملات باستعمال عدد من الفترات الجزئية من دون استعمال طريقة تعجيل رومبرك عليها . كما يظهر بوضوح أكثر في حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل على سبيل المثال في التكامل الأول والثاني حصلنا على قيمة صحيحة لثمان مراتب عشرية عندما $m = n_1 = n_2 = 16$ وفي التكامل الثالث كانت القيمة صحيحة لست مراتب عشرية عندما $m = n_1 = n_2 = 32$ إلا إن الجداول أوضحت انه من خلال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة أعطت نتائج أفضل من حيث سرعة الاقتراب بعدد قليل من الفترات الجزئية نسبياً إلى قيم التكاملات التحليلية اذ كانت مطابقة لقيمة التحليلية في التكامليين الأول والثاني عندما $m = n_1 = n_2 = 16$ وفي التكامل الثالث عندما $m = n_1 = n_2 = 32$ وبذلك يمكن الاعتماد على طريقة $RSSS$ في حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة.

المصادر

[1] Fox L.," Romberg Integration for aClass of Singular Integrands ", comput. J.10 , pp. 87-93 , 1967
[2] Fox L.And Linda Hayes , " On the Definite Integration of Singular Integrands " SIAM REVIEW. ,12 , pp. 449-457 , 1970 .
[3] Hans Schjar and Jacobsen , " Computer Programs for One- andTwo-Dimensional Romberg Integration of Complex Function " , theTechnical University of Denmark Lyngby , pp. 1-12 ,1973
[4] Phillip J. Davis and Phillip Rabinowitz , " Methods of Numerical Integration " , BLASDELL Puplishing Company , pp. 1-2 , 599,113 , chapter 5 , 1975 .
[5]ضياء , عذراء محمد , " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية وثلاثية باستخدام لغةMatlab " , رسالة ماجستيرغير منشورة مقدمة إلى جامعة الكوفة , 2009 .
[6]عكار , بتول حاتم , " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات الثنائية والثلاثية " , رسالة ماجستيرغير منشورة مقدمة إلى جامعة الكوفة 2010
[7] فرانك آيرز , " سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل " , دارماكجروهيل للنشر , الدارالدولية للنشر والتوزيع , ترجمة نخبة من الأساتذة المتخصصين 1988
[8] الطائي , علية شاني , " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية معتلة " , رسالة ماجستير منشورة مقدمة إلى جامعة الكوفة ,2005 .
[9]محمد , علي حسن , " إيجاد قيم تكاملات معتلة المكامل " رسالة ماجستير غير منشورة مقدمة إلى جامعة البصرة , 1984.